مواضيع الإرسال الثالث

يشمل هذا الإرسال أربع سلاسل وهي :

- السلسلة 1 وتشمل درسا واحدا هوا :
  - **أنظمة التعداد.**
- السلسلة 2 وتشمل درسين هما :
  - **القطوع المخروطية.**
  - **التآلف**
- السلسلة 3 وتشمل درسا واحدا :
  - **المعادلات التفاضلية.**
- السلسلة 4 وتشمل 3 دروس وهي :
  - **الاحتمالات.**
  - **مبادئ الإحصاء الوصفي.**
  - **مميزات سلسلة إحصائية.**
- تمارين لمراجعة دروس الإرسال الثالث

أنظمة التعداد

خاص بشعبة علوم الدقيقة فقط

الهدف من الدرس : كتابة الأعداد الطبيعية في أنظمة مختلفة ومعرفة قواعد قابلية القسمة

المدة اللازمة لدراسته : 8 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها : * مجموعة الأعداد الطبيعيةط

* القسمة الإقليدية فيط

* الموافقة.

المراجع : كتاب الرياضيات للسنة 3 ث / ع + ر

المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس.

1 – القسمة الإقليدية فيط

2 – أنظمة التعداد.

3 – نشر عدد طبيعي وفق الأساس ؟.

4 – التعداد ذو الأساس؟.

5 – مقارنة عددين طبيعيين في نفس نظام التعداد.

6 – الانتقال من نظام إلى آخر.

7 – العمليات على مجموعة الأعداد في نفس نظام التعداد.

8 – قواعد قابلية القسمة ي نظام التعداد ذي الأساس ؟.

9 – تمارين التصحيح الذاتي. **10 – الأجوبة.**

1 – القسمة الإقليدية في المجموعة ط :

1 – 1 نظرية :

إذا كان أ و ب عددين طبيعيين كيفيين حيث ب≠ 0 فإنه توجد ثنائية وحيدة (ك،α) من المجموعةط × ط بحيث يكون : أ = ب.ك + α / 0 ≤ α ⟨ب.
تسمى عملية إيجاد الثنائية (ك، α) عند معرفة الثنائية (أ، ب) القسمة الإقليدية للعدد أ على العدد ب. ويسمى العدد ك حاصل القسمة الإقليدية والعددα باقي القسمة.

2 – أمثلة :

* أ = 19 و ب = 6 ، نجد : ك = 3 و α = 1.
لأن : 19 = 6 . 3 + 1 و 0 ≤ 1 ⟩ 6
* أ = 25 و ب = 40 ، نجد : ك = 0 و α = 25 (حالة خاصة)
لأن : 25 = 40 . 0 + 25 و 0 ≤ 25 ⟩ 40
* أ = 52 و ب = 13، نجد : ك = 4 و α = 0.
لأن : 52 = 13 . 4 + 0 و 0 ≤ 0 ⟩13

2 – أنظمة التعداد :

الهدف من التعداد هو تمثيل أي عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعيةط برموز نسميها أرقاماً. تعتمد هذه الطريقة على إختيار عدد طبيعي أ حيث أ > 1 ثم نعرف أ رمزا مختلفة ونكتب كل عدد طبيعي بدلالةأ. نقول في هذه الحالة أننا عرفنا أنظمة التعداد ذات الأساسأ.

2 –1 مثال :

نظام التعداد المستعمل في المفهوم المألوف هو نظام التعداد ذو الأساس عشرة ويسمى النظام العشري ويستخدم هذا النظام الأرقام العربية : 0 ،1 ، 2 ،3 ، 4 ،5 ،6 ، 7 ،8 ،9 . وهي عشرة رموز ، فكل عدد طبيعي يكتب بدلالة هذه الأرقام.

ملاحظة :

لتعريف نظام تعداد ما يجب المعطيات التالية :

*عدد طبيعي ؟ حيث ؟ > 1 (؟ أساس لهذا النظام).

* ؟ رمزاً مختلفة لتمثيل الأعداد الطبيعية في هذا النظام. هذه الرموز أصغر تماماً من؟ ونرمز لها : α_0 ، α_1 ، α_2 ، .....، $\alpha_{؟-1}$.

ونصطلح أن α_0 هو 0 و α_1 هو 1 مهما كان الأساس؟

* **ملاحظة** : إذا كان الأساس ؟ أكبر من عشرة نستكمل الأرقام الباقية بالحروف اليونانية.

2 – 2 – أمثلة :

* إذا كان ؟ = 2 . (نظام التعداد الثنائي) ويستخدم الرقمين 0 ، 1.

* إذا كان ؟ = 5 . (نظام التعداد الخماسي) ويستخدم خمسة أرقام هي : 0 ،1 ، 2 ، 3 ، 4.

* إذا كان ؟ = 12 . (نظام التعداد ذي الأساس إثنا عشر).

ويستخدم الأرقام : 0 ،1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α ، β

3 – نشر عدد طبيعي وفق الأساس ؟ :

3 – 1 مثال :

س عدد طبيعي حيث س = 7421 و؟ = 10

أكتب عبارة العدد س حيث قوى العدد 10

* **الحل :**

س = 1 + 20 + 400 + 7000.

$= 1 + 2 . 10 + 4 . 100 + 7 . 1000$

$= 1 . 10^0 + 2 . 10^1 + 4 . 10^2 + 7 . 10^3$. (*)

لاحظ معاملات قوى العدد 10 كلها أصغر من العدد 10 وهي : 1 ، 2 ، 4 ، 7. تسمى هذه العبارة (*) نشر العدد 7421 حسب قوى 10. أو نشر العدد الطبيعي 7421 وفق الأساس 10.

3 – 2 مثال :

أكتب عبارة العدد الطبيعي 13 حسب قوى العدد 2.

الحل :

لدينا : $13 = 2 \cdot 6 + 1$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

إذن $13 = 2 \times 6 + 1 = 2\,(2 \times 3 + 0) + 1 = 2^2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1$

$= 2^2\,(2 \times 1 + 1) + 0 \cdot 2 + 1$

$= 2^3 \cdot 1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$ أي $13 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$.

وهو نشر العدد 13 وفق الأساس 2 . لاحظ هنا أيضا معاملات قوى العدد 2 هي إما 0 أو 1 . (أصغر تماما من 2).

3- 3 نظرية :

إذا كان س عدداً طبيعيًا حيث س> 1 وكان ع عدداً طبيعيا كيفيا فإنه يوجد نشرٌ وحيد للعدد ع من الشكل : ع = α_0 س^0 + α_1 س^1 + α_2 س^2 + ... + $\alpha_ن$ س^ن.

بحيث : $\alpha_ن \neq 0$ و $0 \leq \alpha_هـ < $ س من أجل كل هـ من ط.

البرهان :

ليكن ع عدد طبيعي كيفي. نميز حالتين :

* **الحالة الأولى :** إذا كان ع < س نجد ع = 0 . س + ع . س° (لأن س ≠ 0) وهذا حسب (النظرية 1 – 1).

* **الحالة الثانية :** إذا كان ع > س.

حسب (النظرية 1-1) يوجد زوج وحيد (ك$_0$، α_0) من المجموعة ط × ط. بحيث يكون : ع = س.ك$_0$ + α_0 و $0 \leq \alpha_0 <$ س.

وهنا إما نجد ك$_0$ < س ومنه ع = α_0 س^0 + ك$_0$ س^1 إذن النشر موجود وَ وحيد.

وإما يكون ك$_0$ > س ومن جديد حسب (النظرية 1-1) يوجد زوج وحيد (ك$_1$، α_1)

بحيث : ك$_0$ = ك$_1$ س + α_1 و $0 \leq \alpha_1 <$ س ومنه نجد ع = س.ك$_0$ + α_0

ع = س(ك$_1$ س + α_1) + α_0 = ك$_1$ س^2 + α_1 س + α_0 حيث (ك$_1$، α_1، α_0) ثلاثية موجودة ووحيدة.

وهكذا نقوم بالعمليات المتتابعة إلى أن نحصل على حاصل $ك_ن$ بحيث $0 \langle ك_ن \langle س$

ونجد متتالية حدودها $\alpha_0 ، \alpha_1 ، \alpha_2 ، .... ، \alpha_{ن-1} ، \alpha_ن = ك_ن$.

من الأعداد الطبيعية كل حد منها أصغر تماماً من س ويكون :

$ع = \alpha_0 س^0 + \alpha_1 س^1 + ... + \alpha_ن س^ن$. حيث $\alpha_ن \neq 0$.

3 - 3 -1 مثال :

ليكن العدد ع = 928 و س = 3. أوجد نشر ع وفق الأساس س = 3.

الحل : لدينا $928 = 3 . 309 + 1$ أي $ك_0 = 309$ وَ $\alpha_0 = 1$

$309 = 3 . 103 + 0$ أي $ك_1 = 103$ وَ $\alpha_1 = 0$

$103 = 3 . 34 + 1$ أي $ك_2 = 34$ وَ $\alpha_2 = 1$

$34 = 3 . 11 + 1$ أي $ك_3 = 11$ وَ $\alpha_3 = 1$

$11 = 3 . 3 + 2$ أي $ك_4 = 3$ وَ $\alpha_4 = 2$

$3 = 3 . 1 + 0$ أي $ك_5 = 1$ وَ $1 \langle 3$ إذن $ك_5 = \alpha_5 = 1$

ومنه $ع = 1 + 0 . 3 + 1 . 3^2 + 1 . 3^3 + 2 . 3^4 + 1 . 3^5$.

4 – نظام التعداد ذو الأساس أ :

حسب (النظرية 3-3) إذا كان أ عدداً طبيعياً حيث $أ > 1$

وكان ع عدداً طبيعياً كيفياً فإنه يوجد نشرٌ وحيدٌ للعدد ع من الشكل :

$ع = \alpha_0 أ^0 + \alpha_1 أ^1 + \alpha_2 أ^2 + ... + \alpha_ن أ^ن$.

نعبِّر على هذا النشر بالكتابة التالية : $\overline{\alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ . \ .... \alpha_ن}^{(أ)}$

وهو يمثل كتابة العدد الطبيعي ع في نظام التعداد ذي الأساس أ. ومنه نميز حالتين :

الحالة الأولى : إذا أخذنا الأعداد : 0 ، 1 ، 2 ، . . . . . ،(أ – 1) وهي عبارة عن أرقام فإن كل عدد طبيعي س< أ يُعبّر عنه برقم واحد وهو الرقم نفسه.

أمثلة :

• في نظام التعداد ذي الأساس 10. كل عدد طبيعي س حيث : $0 \leq$ س $\langle 10$ يُعبر عنه بالعدد س نفسه مثلا : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9

• في نظام التعداد ذي الأساس ا = 3 ، كل عدد طبيعي س حيث :

• $0 \leq$ س $\langle 3$ يُعبر عنه بالعدد س نفسه مثلا : 0 ، 1 ، 2.

* **الحالة الثانية** : إذا كان العدد س أكبر من العدد (ا − 1) فإن للعدد الطبيعي س نشر وحيد وفق الأساس ا هو : ع = α_0 ا^0 + α_1 ا^1 + α_2 ا^2 +. .... + $\alpha_{ن}$ ا^{ن}. حيث : $\alpha_{ن} \neq 0$. وكل عدد حيث هـ ∋{0، 1، 2، ....ن} هو رقما وبالتالي : $0 \leq \alpha_{هـ} \langle$ ا − 1.

ونكتب :ع = $\overline{\alpha_0 \; \alpha_1 \; \alpha_2 \; . \; ....\alpha_{ن}}$(ا)

أمثلة :

* في نظام التعداد ذي الأساس 2 ، العدد 9 يكتب : $\overline{1001}^{(2)}$

* في نظام التعداد ذي الأساس 6 ، العدد 17 يكتب : $\overline{25}^{(6)}$

* في نظام التعداد ذي الأساس 12، مجموعة الأرقام المستعملة للتمثيل في هذا النظام هي :

{ 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α، β }.

وكمثال العدد 4606 يكتب : $\overline{1\;9\;\beta\;\alpha}^{(12)}$ لأن :

4606 = 12 × 383 + 10 وَ 10 =α في النظام ذي الأساس 12 ومنه $\alpha_0 = \alpha$.

383 = 12 . 21 + 11 وَ 11 =β في النظام ذي الأساس 12 ومنه $\alpha_1 = \beta$.

21 = 12 . 1 + 9 وَ 0< 1 < 12 إذن α_2 = 9 و α_3 = 1.

فنجد : $\overline{1\;9\;\beta\;\alpha}^{(12)}$.

5 – مقارنة عددين طبيعيين في نفس نظام التعداد :

5 - 1 نظرية :

ليكن ا عدد طبيعي حيثا > 1 و س عدد طبيعي كيفي غير معدوم.
يوجد عدد طبيعي وحيد ن بحيث يكون : ا^{ن} $\leq$ س $\langle$ ا$^{ن+1}$

5 – 2 – إستنتاج :

القول أن العدد س المكتوب بـ : ن + 1 رقما في نظام التعداد ذي الأساس أ يكافئ أن العدد س محصور بين $أ^{ن}$ و $أ^{ن+1}$ أي $أ^{ن} \leq س \leq أ^{ن+1}$.

5 – 3 مثال :

في نظام التعداد ذي الأساس 10 العدد س = 351

ممثل بثلاثة أرقام . إذن : $10^{2} \leq 351 \langle 10^{3}$. أي $100 \leq 351 < 1000$

ولهذا فإن مقارنة عددين في نظام التعداد ذي الأساس أ يقودنا إلى مقارنة عدد أرقامهما.

* **الحالة الأولى** : إذا كان عدد الأرقام التي تشكل العددين مختلفا فإن العدد الذي له أكبر عدد من الأرقام هو الأكبر.

5 – 4 مثال :

ليكن : س = $\overline{1010}^{(3)}$ وعَ = $\overline{121}^{(3)}$

لاحظ العدد س مشكل من 4 أرقام والعدد ع مشكل من 3 أرقام إذن : س > ع.

* **الحالة الثانية** : إذا كان للعددين نفس عدد الأرقام فإننا نقارن الأرقام المرفقة لأكبر قوى الأساس أ وهكذا...

5 – 5 مثال :

ليكن : س = $\overline{2456}^{(7)}$ وَ ع = $\overline{3014}^{(7)}$

لاحظ العددين س وَ ع مشكلان من نفس عدد الأرقام . إنما الرقم المرفق لأكبر قوى الأساس 7 بالنسبة للعدد س هو 2 والرقم المرفق لأكبر قوى الأساس 7 بالنسبة للعدد ع هو 3.

ونعلم أن 3 > 2 فيكون ع > س.

5 – 6 مثال :

ليكن العددين : س = $\overline{240}^{(8)}$ وَ ع = $\overline{253}^{(8)}$

نلاحظ أن العددين س وَ ع ممثلان بنفس عدد الأرقام والرقمين المرفقين بأكبر قوى الأساس 8 بالنسبة للعددين هو 2.

إذن نلجأ لمقارنة الرقمين المرفقين لقوى 2 للأساس 8 بالنسبة للعددين ومنه.

الرقم المرفق للقوى 2 للأساس 8 بالنسبة للعدد س هو 4.

الرقم المرفق للقوى 2 للأساس 8 بالنسبة للعدد ع هو 5.

ولدينا 5 أكبر من 4 . إذن العدد ع أكبر من العدد س.

6 – الانتقال من نظام إلى آخر :

إذا أردنا نقل كتابة عدد س في نظام التعداد ذي الأساس أ إلى نظام التعداد ذي الأساس ب، ننقل أولا كتابة س من النظام ذي الأساس أ إلى النظام العشري ثم من النظام العشري إلى النظام ذي الأساس ب.

6 –1 مثال :

أكتب العدد س = $\overline{75}^{(8)}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7.

الحل :

لدينا $\overline{75}^{(8)} = 5 + 7 \,.\, 8 = 61$ (في النظام العشري).

ومنه $61 = \overline{115}^{(7)}$. نجد $\overline{75}^{(8)} = \overline{115}^{(7)}$.

6 – 2 حالة خاصة :

الحالة الأولى : إذا كان : ب = أ ^{ك}

نفرض أن العدد : س = $\overline{\alpha_0\ \alpha_1\ ....\ \alpha_{ن}}^{(أ)}$ فيمكننا كتابته كما يلي :

$$س = \alpha_0 + \alpha_1 أ + \alpha_2 أ^2 + ... \alpha_{ك-1} أ^{ك-1} + \alpha_{ك} أ^{ك} + ... + \alpha_{2ك-1} أ^{2ك-1} + \alpha_{2ك} أ^{2ك} + ... + \alpha_{3ك-1} أ^{3ك-1} + ... + \alpha_{ن} أ^{ن}$$

$$س = \left(\alpha_0 + \alpha_1 أ + ... + \alpha_{2ك-1} أ^{ك-1}\right) + \left(\alpha_{ك} + ... + \alpha_{2ك-1} أ^{ك-1}\right) أ^{ك} + \left(\alpha_{2ك} + ... + \alpha_{3ك-1}\right) أ^{2ك} + ... \alpha_{ن} أ^{ن}$$

نجد :

$$س = \overline{\alpha_0\ \alpha_1\ ....\ \alpha_{ك-1}}^{(أ)} + \overline{\alpha_0\ \alpha_{ك+1}\ ....\ \alpha_{2ك-1}}^{(أ)} .أ^{ك} + \overline{\alpha_{2ك}\ ....\ \alpha_{3ك-1}}^{(أ)} .أ^{2ك} + ... + \alpha_{ن} أ^{ن}$$

$$س = \overline{\alpha_0\ \alpha_1\ ....\ \alpha_{ك-1}}^{(أ)} + \overline{\alpha_0\ \alpha_{ك+1}\ ....\ \alpha_{2ك-1}}^{(أ)} .ب + \overline{\alpha_{2ك}\ ....\ \alpha_{3ك-1}}^{(أ)} .ب^{2} + ... + \alpha_{ن} أ^{ن}$$

ومنه نستنتج ما يلي : نجزئ أرقام العدد س إلى أجزاء ذات ك رقماً متتابعة بداية من α_0 ثم نعوض كل جزء بالرقم المرفق للأساس ب.

6 – 2 – 1 مثال :

إليك العدد : س = $\overline{10111101}^{(2)}$.

أكتب العدد س في نظامي التعداد ذي الأساسين 8 وَ 16.

الحل :

كتابة العدد س في نظام التعداد ذي الأساس 8.

لدينا $8 = 2^3$ أي (أ = 2 ، ب = 8 و ك = 3).

ومنه $\text{س} = \underbrace{101}_{\text{3 أرقام}} \; / \; \underbrace{111}_{\text{3 أرقام}} \; / \; 10$

ثم نبحث $\overline{101}^{(2)} = 1 + 2.0 + 1.2^2 = 5$

$$\overline{111}^{(2)} = 1 + 2.1 + 1.2^2 = 7$$

$$\overline{10}^{(2)} = 0 + 2.1 = 2$$

فنجد : $\text{س} = \overline{275}^{(8)}$

كتابة العدد س في نظام التعداد ذي الأساس 16.

لدينا $16 = 2^4$ أي (أ = 2 و ب = 16 و ك = 4)

ولتكن مجموعة أرقام نظام التعداد ذي الأساس 16 هي : $\{0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، \alpha ، \beta ، \gamma ، \varepsilon ، \mu ، \tau\}$

ثم نجزئ أرقام العدد س إلى أجزاء ذات 4 أرقام.

س = 1101 / 1011.

لدينا $\overline{1101}^{(2)} = 1 + 2.0 + 1.2^2 + 1.2^3 = 13$ و $13 = \varepsilon$

$\overline{01}^{(2)} = 1 + 2.1 + 0.2^2 + 1.2^3 = 11$ و $11 = \beta$

و منه $\text{س} = \overline{\varepsilon\,\beta}^{(16)}$

*** الحالة الثانية :**

إذا كان $\text{أ} = \text{ب}^{\text{ك}}$.

نفرض أن العدد $\text{س} = \overline{\alpha_0 ، \alpha_1 \;\; .... \alpha_{\text{ن}}}^{(\text{أ})}$. نجد :

$\text{س} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{أ}^1 + \alpha_2 \text{أ}^2 + \alpha_3 \text{أ}^3 + ... + \alpha_{\text{ن}} \text{أ}^{\text{ن}}$.

$= \alpha_0 + \alpha_1 \text{ب}^{\text{ك}} + \alpha_2 \text{ب}^{2\text{ك}} + \alpha_3 \text{ب}^{3\text{ك}} + ... + \alpha_{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ن ك}}$.

$= \alpha_0 + 0\text{ب} + 0\text{ب}^2 + 0.\text{ب}^3 + ... + 0.\text{ب}^{\text{ك}-1} + \alpha_1 \text{ب}^{\text{ك}} + 0.\text{ب}^{\text{ك}+1} + 0.\text{ب}^{\text{ك}+2} + ... + 0.\text{ب}^{2\text{ك}-1}$

$+ \alpha_2 .\text{ب}^{2\text{ك}} + 0.\text{ب}^{2\text{ك}+1} + ... + \alpha_{\text{ن}} .\text{ب}^{\text{ن ك}}$.

نتيجة : كل رقم للعدد س في نظام التعداد ذي الأساس أ يُعوض بعدد ذو ك رقما في الأساس ب . كما يوضح المثال الآتي.

6 – 2 – 2 – مثال :

ليكن العدد $\text{س} = \overline{5231}^{(9)}$. أكتب العدد س في نظام التعداد ذي الأساس 3.

الحل :

لدينا أ = 9 وَ ب = 3 وَ $\text{أ} = 3^2$ أي ك = 2.

1 يعوض بِـ 01 في النظام ذي الأساس 3.

3 يـعـوض بـِ 10 فـي الـنـظـام ذي الأسـاس 3.
2 يـعـوض بـِ 02 فـي الـنـظـام ذي الأسـاس 3.
5 يـعـوض بـِ 12 فـي الـنـظـام ذي الأسـاس 3.
ومـنـه س = ${}^{(3)}\overline{12021001}$.

7- العمـليـات علـى مـجـموعـة الأعداد فـي نفس نظـام التعداد :

لـجـمـع عدديـن أو ضـرب عـدديـن مـكـتـوبـيـن فـي الـنـظـام الـعـشـري يـكـفـي أن نـعـرف مـجـمـوع وجـداء كـل رقـمـيـن مـخـتـلـفـيـن ونـلـخـص هـذه الـنـتـائـج فـي جـداول نـسـمـيـهـا جـداول الـجـمـع وجـداول الـضـرب.

وفـي الـنـظـام ذي الأسـاس الـكـيـفـي نـسـتـخـدم نـفـس الـطـريـقـة لـجـمـع أو لـضـرب عـدديـن مـكـتـوبـيـن فـي هـذا الـنـظـام.

7 – 1 مـثـال :

فـي نـظـام الـتـعـداد ذي الأسـاس2 ، نـجـد جـدولـي الـجـمـع والـضـرب .

1	0	+
1	0	0
${}^{(2)}\overline{10}$	1	1

1	0	×
0	0	0
1	0	1

$${}^{(2)}\overline{1011} + {}^{(2)}\overline{111} = {}^{(2)}\overline{10010}$$

7 – 2 مـثـال :

فـي نـظـام الـتـعـداد ذي الأسـاس 4، نـجـد

3	2	1	0	×
0	0	0	0	0
3	2	1	0	1
${}^{(4)}\overline{12}$	${}^{(4)}\overline{10}$	2	0	2
${}^{(4)}\overline{21}$	${}^{(4)}\overline{12}$	3	0	3

3	2	1	0	+
3	2	1	0	0
${}^{(4)}\overline{10}$	3	2	1	1
${}^{(4)}\overline{11}$	${}^{(4)}\overline{10}$	3	2	2
${}^{(4)}\overline{12}$	${}^{(4)}\overline{10}$	${}^{(4)}\overline{10}$	0	3

$$\overline{31}^{(4)} \times \overline{12}^{(4)} = \overline{1022}^{(4)}$$

8 – قواعد قابلية القسمة في نظام التعداد ذي الأساس ا :

في كل ما يأتي ق عدد طبيعي غير معدوم وقاسم للعدد س. وليكن س عدد طبيعي غير معدوم بحيث يكون :

س $= \alpha_0 + \alpha_1 ا^1 + \alpha_2 ا^2 + \alpha_3 ا^3 + \ldots\ldots + \alpha_ن ا^ن$. أي س $= \overline{\alpha_ن \ldots \alpha_2\, \alpha_1\, \alpha_0}^{(ا)}$.

8 – 1 نظرية :

إذا كان العدد ق قاسما للعدا فإن العدد س المكتوب في نظام التعداد ذي الأساسا يحقق :

س $\equiv \alpha_0$ [ق].

البرهان :

لدينا س $= \overline{\alpha_ن \ldots\ldots \alpha_1\, \alpha_0}^{(ا)}$ أي :

س $= \alpha_0 + \alpha_1 ا^1 + \alpha_2 ا^2 + \alpha_3 ا^3 + \ldots\ldots + \alpha_ن ا^ن$.

بما أن العدد ق قاسم للعد أ نجد ا $\equiv 0$ [ق]

$\forall$ هـ ∍ ط : $\alpha_هـ ا^هـ \equiv 0$ [ق] نستنتج أن س $\equiv \alpha_0$ [ق]

8 – 1 – 1 أمثلة :

* ليكن س = 1056 في نظام التعداد ذي الأساس 10 والعدد ق = 2 نجد : س يقبل القسمة على 2 لأن س$\equiv$0[2] وَ 2 قاسم للعدد 10 وبما أن 0$\equiv$0[2] فإن س$\equiv$0[2].

* ليكن س = $\overline{350}^{(6)}$ و ليكن ق = 3. نجد 3 قاسم للعدد 6 إذن س$\equiv 0$ [3]

8–2 قاعدة :

إذا كان العدد س مكتوبا في نظام التعداد ذي الأساسا بحيث : س$= \overline{\alpha_ن \ldots\ldots \alpha_1\, \alpha_0}^{(ا)}$ و ق قاسما للعددا فإن س يقبل القسمة على ق إذا كان α_0 يقبل القسمة على ق.

8 – 2 – 1 مثال :

في نظام التعداد ذي الأساس 10 كل عدد رقم أحاده زوجي يقبل القسمة على 2 لأن 2 يقسم العدد 10.

8 –3 – نظرية :

إذا كان العدد ق قوة لأحد قواسم الأساسأ ، أي :ق= $\text{حـ}^{\text{هـ}}$

وَ جـ قاسم للعددأ فإن $\text{س} \equiv \overline{\alpha_{\text{هـ}-1}........\alpha_1\alpha_0}^{(\text{أ})}\,[\text{ق}]$.

8 – 3 –1 مثال :

لدينا 4 = 2^2 وَ س = 1324 في نظام التعداد ذي الأساس 10 نجد $1324 \equiv 24\,[4]$ وَ بما أن $24 \equiv 0\,[4]$ فإن $1324 \equiv 0\,[4]$.

8 – 4 – نظرية :

ليكن العدد المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس أ، إذا كان العدد ق = أ + 1 أو ق قاسم للعدد أ + 1 فإن :

$$\text{س} \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots \qquad ....+(-1)^{\text{ن}}.\alpha_{\text{ن}}\,[\text{ق}]$$

البرهان :

بما أن ق = أ + 1 نجد أ = ق – 1 ومنه $\text{س} = \alpha_0 + \alpha_1\text{أ}^1 + \alpha_2\text{أ}^2 + \quad ......+\alpha_{\text{ن}}\text{أ}^{\text{ن}}$.

$$\text{س} = \alpha_0 + \alpha_1(\text{ق}-1) + \alpha_2(\text{ق}-1)^2 + .. \qquad ....+\alpha_{\text{ن}}(\text{ق}-1)^{\text{ن}}.$$

$$\text{س} = \alpha_0 + \alpha_1\text{ق} - \alpha_1 + \alpha_2\text{ق}^2 \quad ....+\alpha_2 + \alpha_3\text{ق}^3 + \quad ....\alpha_3 3\text{ق} - \alpha_3 + \quad ....+\alpha_{\text{ن}}\text{ق}^{\text{ن}} + \ldots$$

$$+\ \alpha_{\text{ن}}(-1)^{\text{ن}}.$$

$$\text{س} = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \quad ....+(-1)^{\text{ن}}\alpha_{\text{ن}} + \text{ق}\left[\alpha_1 + \alpha_2\text{ق}^1 + \quad .....+\alpha_{\text{ن}}\right]$$

نستنتج أن $\text{س} \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \quad ....+(-1)^{\text{ن}}\alpha_{\text{ن}}\,[\text{ق}]$.

أو $\text{س} \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \quad ....+(-1)^{\text{ن}}\alpha_{\text{ن}}\,[\text{أ}+1]$.

8 – 5 – قاعدة :

كل عدد طبيعي س مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس أ يقبل القسمة على العددأ + 1 إذا كان الفرق بين مجموع أرقامه ذات الرتب الزوجية ومجموع أرقامه ذات الرتب الفردية من مضاعفات العددأ + 1.

8 – 5 – 1 – مثال :

في نظام التعداد ذي الأساس 10 العدد س = 33451 يقبل القسمة على العدد 11 لأن 11 = 10 + 1 ومجموع الأرقام ذات الرتب الفردية هو : 1 + 4 + 3 = 8 ومجموع الأرقام ذات الرتب الزوجية هو : 5 + 3 = 8 والفرق بين المجموعين هو : 8 – 8 = 0 وَ 0 مضاعف للعدد 11 إذن : 33451 يقبل القسمة على 11.

8 – 6 – نظرية :

> ليكن العدد س المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس أ.
> إذا كان العدد ق = أ – 1 أو ق قاسم للعدد أ –1 فإن :
> $$\text{س} \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \quad .... + \alpha_{\text{ن}} \, [\text{ق}]$$

البرهان :

لدينا ق = أ – 1 فيكون أ = ق + 1 وَ $\text{س} = \overline{\alpha_0 \alpha_1 \quad ......\alpha_{\text{ن}}}$ (أ)

إذن $\text{س} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{أ}^1 + \alpha_2 \text{أ}^2 + \quad ....\alpha_{\text{ن}} \text{أ}^{\text{ن}}.$

$$\text{س} = \alpha_0 + \alpha_1 (\text{ق} + 1) + \alpha_2 (\text{ق} + 1)^2 + \dots \quad ....\alpha_{\text{ن}} (\text{ق} + 1)^{\text{ن}}.$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \text{ق} + \alpha_1 + \alpha_2 \text{ق}^2 + ... \alpha_2 + ... \alpha_{\text{ن}} \text{ق}^{\text{ن}} + ... + \alpha_{\text{ن}} \text{ق} \quad + \alpha_{\text{ن}}.$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \quad .... + \alpha_{\text{ن}} + \text{ق} \left[\alpha_1 + \alpha_2 \text{ق} + \quad .... + \alpha_{\text{ن}} \right]$$

ومنه $\text{س} \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \quad ....\alpha_{\text{ن}} [\text{ق}]$ أو $\text{س} \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \quad ....\alpha_{\text{ن}} [\text{أ} - 1].$

8 – 7 قاعدة :

> كل عدد طبيعي س مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس أ يقبل القسمة على العدد أ – 1 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد أ – 1.

8 – 7 – 1 مثال :

ليكن العدد س = 20511 في نظام التعداد ذي الأساس 10 نجد مجموع أرقامه هو 1 + 1 + 5 + 0 + 2 = 9 .

إذن العدد س يقبل القسمة على 9 و(9 = 10 – 1). وكذلك العدد 20511 يقبل القسمة على 3 لأن 3 قاسم للعدد 9.

9 – تمارين التصحيح الذاتي :

9 – 1 – ليكن العدد الطبيعي س في نظام التعداد ذي الأساس 10 حيث س = 245

1) أكتب العدد س في نظام التعداد ذس الأساس 8 ثم أكتبه في نظام التعداد ذي الأساس 2.

2) هل العدد س يقبل القسمة على العدد 7 في نظام التعداد ذي الأساس 8 ؟

3) هل العدد س يقبل القسمة على العدد 3 في نظام التعداد ذي الأساس 2 ؟

9 – 2 – 1) أعط جدولي الجمع والضرب في نظام التعداد ذي الأساس 7.

2) أنجز العمليتين الآتيتين في هذا النظام.

$\overline{241}^{(7)} \times \overline{63}^{(7)}$ و $\overline{1234}^{(7)} + \overline{503}^{(7)} + \overline{126}^{(7)}$.

3) أكتب في نظام التعداد ذي الأساس 10 النتائج المحصل عليها.

9 – 3 – عين مجموعة كل الأعداد التي تكتب : $\overline{\text{ص ع س}}$

في نظام التعداد ذي الأساس 5 وَ $\overline{\text{ع ص س}}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7.

10 – أجوبة التصحيح الذاتي :

9 – 1 – لدينا س = 245 في نظام التعداد ذي الأساس 10

1) كتابة العدد س في نظام التعداد ذي الأساس 8.

$$\begin{array}{r|l} 245 & 8 \\ \hline 05 & \begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \hline \boxed{6} & \boxed{3} \end{array} \\ \boxed{5} & \end{array}$$

س = $\overline{365}^{(8)}$

كتابة العدد س في نظام التعداد ذي الأساس 2 :

بما أن : س = $\overline{365}^{(8)}$ وَ $8 = 2^3$. حسب (6– 2) الحالة الثانية $أ = ب^{ك}$

نجد :أ = 8 و ب = 2 و ك = 3 إذن كل رقم للعدد س في نظام التعداد ذي الأساس 8 يُعوض بعدد ذو 3 أرقام في النظام الثنائي حيث : 5 تُعوض بِ 101 في النظام الثنائي.

6 تعوض بِ 110 في النظام الثنائي.

3 تعوض بِ 011 في النظام الثنائي.

ومنه : س = $\overline{11\ 110\ 101}^{(2)}$.

2) دراسة قابلية قسمة العدد س على العدد 7 في نظام التعداد ذي الأساس 8.

لدينا س = $\overline{365}^{(8)}$. وَ 7 = 8 – 1 حسب النظرية (8 – 6) نجد :

ق = 7 وَ أ = 8 ومنه ق =أ – 1 أي 7 = 8 – 1 نستنتج أن :

س ≡ 5 + 6 + 3 [7] أي : س ≡ 14 [7] ومنه س ≡ 0 [7]

إذن س يقبل القسمة على 7.

3) دراسة قابلية القسمة للعدد س على العدد 3 في نظام التعداد ذي الأساس 2 حسب النظرية (8 – 4) نجد : ق = 3 و أ = 2 ومنه ق =أ + 1

نستنتج أن : س ≡ 1 – 1 + 0 – 1 + 0 – 1 + 1 – 1 + 1 [3] س ≡ 2 [3]

إذن العدد س لا يقبل القسمة على العدد 3 في نظام التعداد ذي الأساس 2.

9 – 2 – 1) في نظام التعداد ذي الأساس 7 نستخدم الأرقام التالية :

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ومنه :

جدول الـجـمـع :

مثلا : $6 + 5 = 11$

و11 يكتب : $\overline{14}^{(7)}$

لاحظ : 11 7

4 1

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	$\overline{10}$
2	2	3	4	5	6	$\overline{10}$	$\overline{11}$
3	3	4	5	6	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
4	4	5	6	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
5	5	6	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
6	6	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$

جدول الـضـرب :

مثلا : $5 \times 6 = 30$

و 11 يكتب : $\overline{14}^{(7)}$

لاحظ : 11 7

4 1

و30 يكتب : $\overline{42}^{(7)}$

لاحظ : 30 7

2 4

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$
3	0	3	6	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$
4	0	4	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{22}$	$\overline{26}$	$\overline{33}$
5	0	5	$\overline{13}$	$\overline{21}$	$\overline{26}$	$\overline{34}$	$\overline{42}$
6	0	6	$\overline{15}$	$\overline{24}$	$\overline{33}$	$\overline{42}$	$\overline{51}$

2) إنـجاز عـمـلـيـة الـضـرب فـي نـظـام الـتـعـداد ذي الأسـاس 7.

$$\begin{array}{r} ^{(7)}\overline{241} \\ ^{(7)}\overline{63} \\ \hline 1053 \\ 2136 \\ \hline ^{(7)}\overline{22443} \end{array}$$

$\overline{241}^{(7)} \times \overline{63}^{(7)} = \overline{22443}^{(7)}$.

* إنـجـاز عـمـلـيـة الـجـمـع فـي نـظـام الـتـعـداد ذي الأسـاس 7.

$\overline{1234}^{(7)} + \overline{503}^{(7)} + 126^{(7)} = \overline{2166}^{(7)}$

9 – 3 لديـنـا الـعـدديـن : $\overline{ص ع س}^{(5)}$ و $\overline{س ص ع}^{(7)}$ يـكـتـبـان كما يلي :

$\overline{ص ع س}^{(5)}$ = ص + 5ع + 25 س ، فـي الـنـظـام الـعـشـري حـيـث :

$0 \leq$ س $\langle 5$ ، $0 \leq$ ع $\langle 5$ ، $0 \leq$ ص $\langle 5$

$\overline{س ص ع}^{(7)}$ = س + 7 ص + 49 ع في الـنـظـام الـعـشـري حـيـث :

$0 \leq$ س $\langle 7$ ، $0 \leq$ ع $\langle 7$ ، $0 \leq$ ص $\langle 7$

وَمنـه يكـون : ⎫ ص + 5 ع + 25 س = س + 7 ص + 49 ع **(I)**

وَ

0 ≥ س〈5 وَ 0 ≥ ع〈5 وَ 0 ≥ ص〈5

(I) ⇔ ⎨ 24 س − 44 ع − 6 ص = 0

وَ

0 ≥ س〈5 وَ 0 ≥ ع〈5 وَ 0 ≥ ص〈5

⇔ ⎨ 12 س − 22 ع − 3 ص = 0

وَ

0 ≥ س〈5 وَ 0 ≥ ع〈5 وَ 0 ≥ ص〈5

⇔ ⎨ 3(4 س − ص) = 22 ع.. ....(1)

وَ

0 ≥ س〈5 وَ 0 ≥ ع〈5 وَ 0 ≥ ص〈5

من العلاقة (1) نلاحظ أن 3 يقسم الجداء 22 ع والعد 3 أولي مع العدد 22، حسب نظرية " قوص " العدد 3 يقسم العدد ع ومنه ع = 0 أو ع = 3 لأن 0≥ص〈5 .

* لما ع = 0 نجد 3 (4س – ص) = 0 و منه 4 س – ص = 0 أي ص = 4 س.

نستنتج أن ص مضاعف للعدد 4 و بالتالي ص = 0 أو ص = 4.

لأن 0≥ص〈5 . ومنه إذا كان ص = 0 يكون س = 0.

وإذا كان ص = 4 يكون س = 1.

* لما ع = 3 نجد 3 (4س – ص) = 22 x 3 ومنه 4 س – ص = 22 أي 4 س – 22 = ص

⇔ 2 (2 س – 11) = ص.

نستنتج أن ص مضاعفا للعدد 2 أي ص عدد زوجي ومنه ص = 0 أو ص = 2 أو ص = 4

لما ص = 0 نجد 2 (2 س– 11) = 0 ومنه 2 س – 11 = 0 أي س $=\frac{11}{2}$ وهي قيمة مرفوضة لأن س عدد طبيعي.

لما ص = 2 نجد 2 (2 س − 11) = 2 ⇔ 2 س − 11 = 1 ومنه س $=\frac{11}{2}=6$

لما ص = 4 نجد 2 (2 س– 11) = 4 ⇔ 2 س – 11 = 2 ومنه س $=\frac{13}{2}$

وهي قيمة مرفوضة لأن س عدد طبيعي.

القطوع المخروطية

خاص بشعبة علوم الدقيقة فقط

المدة اللازمة لدراسته : 10 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

- تغيير المعلم.
- دراسة تغيرات الدوال العددية.
- التحويلات النقطية.
- البعد بين نقطتين و بعد نقطة عن مستقيم

المراجع : كتابة الرياضيات للسنة 3 ث / ع + ر

المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس.

1 - مفهوم القطع المخروطي.

2 - تعريف القطع المكافئ.

3 - خواص القطع المكافئ.

4 - معادلة القطع المكافئ.

5 - تعريف كل من القطع الناقص و القطع الزائد.

6 - معادلتا القطع الناقص والقطع الزائد.

7 - تصنيف القطوع المخروطية.

8 - إنشاء القطوع المخروطية.

9 - معادلة القطع الزائد المنسوب إلى مستقيميه المقاربين.

10 - تمارين التصحيح الذاتي. 11 - أجوبة التصحيح الذاتي.

1 – مفهوم القطع المخروطي :

لتكن في المستوي (π) نقطة ثابتة ف و مستقيم (Δ) لا يشمل النقطة ف. نسمي القطع المخروطي (Γ) مجموعة النقط ن من المستوي (π) التي تحقق ما يلي :

$\frac{\text{ن ف}}{\text{ن هـ}}$ = ك حيث ك عدد حقيقي موجب تماماً والنقطة هـ المسقط العمودي للنقطة ن على المستقيم (Δ)، وعليه نميز 3 حالات حسب قيم العدد الحقيقي ك وهي : ك = 1 ، 0< ك < 1 ، ك 〉 1 والتي نتطرق لدراستها فيما بعد.

*** ملاحظة :**

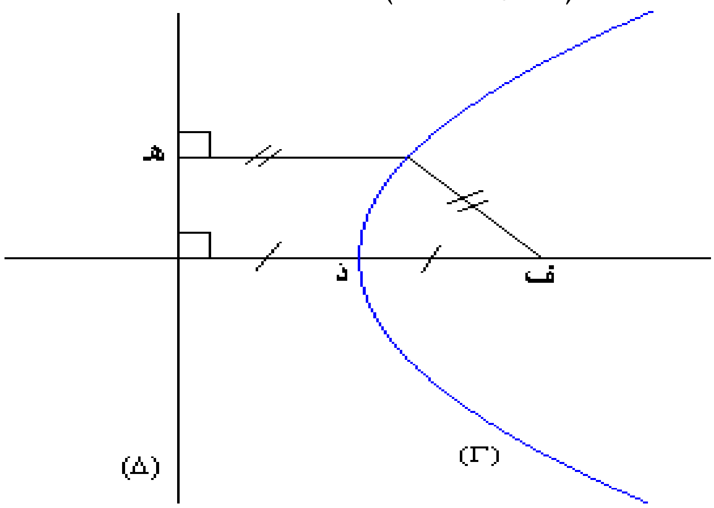
لتكن في الفضاء (ي) مجموعة نقط سطح مخروطي من الدرجة الثانية. إن المنحني (Γ) مجموعة نقط تقاطع السطح المخروطي (ي) وكل مستوي من هذا الفضاء يدعى قطع مخروطي. لهذا نسب له هذا الإسم وبالتالي القطع المخروطي(Γ) يمكن أن يكون مجموعة خالية أو نقطة أو مستقيم أو اتحاد مستقيمين أو منحني.

2 – تعريف القطع المكافئ :

مما سبق إذا كان ك = 1 فإن (Γ) ={ن / ن ∋ (π) ن ف = ن هـ}

أي أن القطع المخروطي (Γ) هو مجموعة النقط ن من المستوي (π) والتي بعد كل منها عن النقطة ف يساوي بعدها عن المستقيم (Δ).

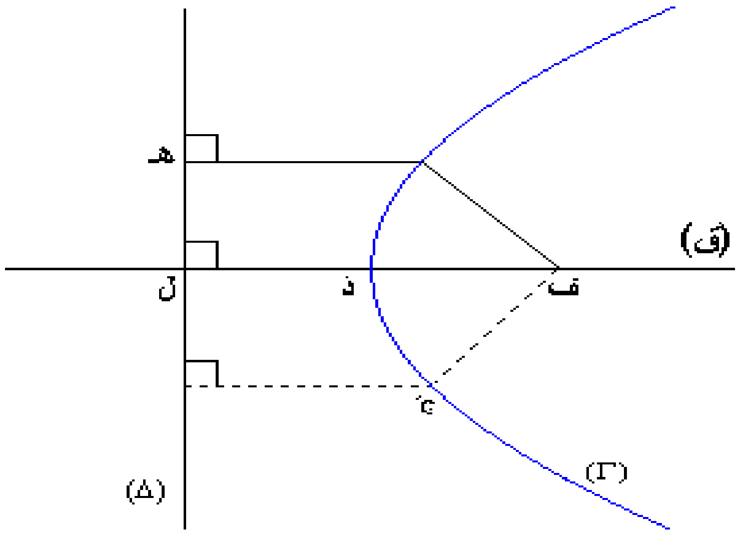
نسمي المنحني (Γ) في هذه الحالة قطعاً مكافئا حيث النقطة ف بؤرته (أو محرقه) والمستقيم (Δ) دليله. (أنظر الشكل).



3 - خواص القطع المكافئ :

ليكن القطع المكافئ (Γ) حيث : $(\Gamma)=\{$ن/ن $\in (\pi)$ وَ ن ف = ن هـ$\}$ وليكن المستقيم (ق) الذي يشمل النقطة ف وعمودي على المستقيم(Δ) ول نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و(ق) و ذ نقطة تقاطع المستقيم (ق) والمنحني (Γ).

أنظر الشكل



3 – 1 - إذا كان ن نقطة من القطع المكافئ (Γ) فإن نظيرتها النقطة نَ بالنسبة للمستقيم (ق) هي أيضا نقطة من القطع المكافئ (Γ). إذن المستقيم (ق) هو محور تناظر بالنسبة للمنحني (Γ) يُسمى محور القطع المكافئ.

3 – 2 - توجد نقطة وحيدة من المنحني (Γ) تبعد نفس البعد عن النقطتين ف و ل. (ل هي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (ق) وهي النقطة ذ تسمى ذروة القطع المكافئ (Γ).

3 – 3 - يسمى البعد ف ل الوسيط أو البعد المحرقي ونرمز له بالرمز ط ونكتب ف ل = ط.

4 – معادلة القطع المكافئ :

4 – 1 معادلة القطع المكافئ :

ليكن المستوي (π) المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$. وليكن القطع المكافئ (Γ) بؤرته ف ذات الإحداثيتين $(\alpha ، \beta)$ ودليله المستقيم (Δ) ذي المعادلة: أ س +ب ع + جـ =0 حيث $(أ ، ب) \neq (0 ، 0)$. لدينا $(\Gamma) = \{ن / ن \in (\pi)$ و ن ف = ن هـ$\}$ حيث (س،ع) إحداثي النقطة ن من المنحني (Γ).

إذن ن ف = ن هـ $\Leftrightarrow$ ن ف^2 = ن هـ^2 أي ف ن^2 هـ ن^2.

بما أن مركبتي $\overleftarrow{ف ن}$ هما $\begin{pmatrix} س - \alpha \\ ع - \beta \end{pmatrix}$ فإن . ف ن^2 = $(س - \alpha)^2 + (ع - \beta)^2$

كذلك هـ ن هي بعد النقطة ن عن المستقيم(Δ) فإن :

$$هـ ن = \frac{|أ س + ب ع + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \quad \text{ومنه} \quad هـ ن^2 = \frac{|أ س + ب ع + جـ|^2}{أ^2 + ب^2}$$

نستنتج ما يلي :

$$\boxed{ف ن^2 = هـ ن^2 \Leftrightarrow (س - \alpha)^2 + (ع - \beta)^2 = \frac{|أ س + ب ع + جـ|}{أ^2 + ب^2} \quad (1)}$$

نسمي العلاقة (1) معادلة القطع المكافئ (Γ).

ملاحظة :

بعد نشر وتبسيط طرفي المعادلة (1) نجد :

$$(1) \Leftrightarrow (أ^2 + ب^2)\left[(س - \alpha)^2 + (ع - \beta)^2\right] = |أ س + ب ع + جـ|^2$$

$$(1) \Leftrightarrow (أ^2 + ب^2)\left[س^2 - 2\alpha س + \alpha^2 + ع^2 - 2\beta ع + \beta^2\right] = (أ س + ب ع)^2 + 2 جـ (أ س + ب ع) + جـ^2$$

أخيرًا

$$(1) \Leftrightarrow ب^2 س^2 + أ^2 ع^2 + 2(-\alpha ب^2 - أ جـ) س + 2(-\beta ب^2 - ب جـ) ع - 2 أ ب س ع$$
$$+ أ^2 \beta^2 + أ^2 \alpha^2 + ب^2 \beta^2 + ب^2 \alpha^2 - جـ^2 = 0$$

بوضع $أَ = ب^2$، $بَ = أ^2$، $جَـ = -\alpha ب^2 -$ جـ أ ، $دَ = -\beta ب^2 -$ جـ ب ، $هـَ = -أ$ ب و $= (أ^2 + ب^2)(\alpha^2 + \beta^2) -$ جـ^2 يصبح شكل العلاقة (1) كالآتي :

$$أَ س^2 + بَ ع^2 + 2 جَـ س + 2 دَ ع + 2 هـَ س ع + وَ = 0$$ حيث :

$\overleftarrow{أَ}$ ، بَ ، جَـ ، دَ ، هـَ ، وَ أعداد حقيقية مع $\overleftarrow{أَ}$ ، بَ غير معدومين معًا ولهما نفس الإشارة.

* **نتيجة 1 :**

نستنتج أن لكل قطع مكافئ معادلة من الشكل :

$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{ع}^2 + 2\,\text{جـ}\,\text{س} + 2\,\text{د}\,\text{ع} + 2\,\text{هـ}\,\text{س}\,\text{ع} + \text{و} = 0$$

4 – 2 المعادلة المبسطة للقطع المكافئ :

توجد حالتان لإختيار محور القطع المكافئ بتغيير المعلم أولا بإعتبار المحور (ق) هو محور التراتيب عَ م ع والذروة ذ(0 ،0) مبدأ جديد وثانيا اعتباره محور الفواصل سَ م س والذروة ذ مبدأ المعلم الجديد.

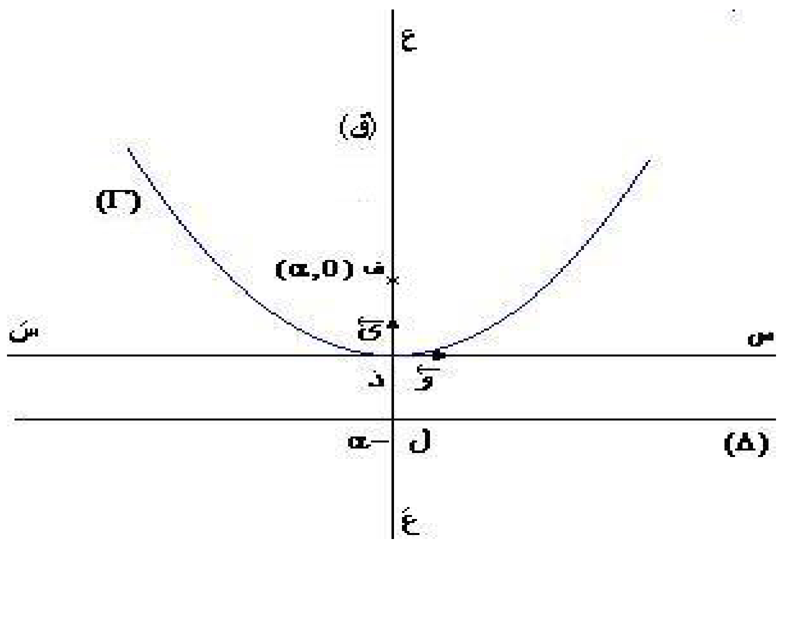
* **الحالة الأولى :** إذا كان المستقيم (ق) هو محور التراتيب عَ م ع وكانت الذروة ذ(0 ،0) مبدأ المعلم الجديد $(\text{ذ}\,،\,\vec{\text{و}}\,،\,\vec{\text{ي}})$ فإن إحداثيي البؤرة ف من الشكل $(0\,،\,\alpha)$ ومعادلة الدليل (Δ) هي : $\text{ع} = -\alpha$ حيث $\alpha \neq 0$ (لأن ذ منتصف القطعة [ف ل].

ومنه معادلة القطع المكافئ (Γ) هي: $(\text{س}-0)^2 + (\text{ع}-\alpha)^2 = (\text{ع}+\alpha)^2$. (حسب 4 –1) فنجد :

$$\text{س}^2 + \text{ع}^2 - 2\alpha\,\text{ع} + \alpha^2 = \text{ع}^2 + 2\alpha\,\text{ع} + \alpha^2 \Leftrightarrow \text{س}^2 = 4\alpha\,\text{ع}$$

أي $\text{ع} = \dfrac{\text{س}^2}{4\alpha}$ وهي المعادلة المبسطة للقطع المكافئ (Γ) محوره عَ م ع.

(أنظر الشكل)



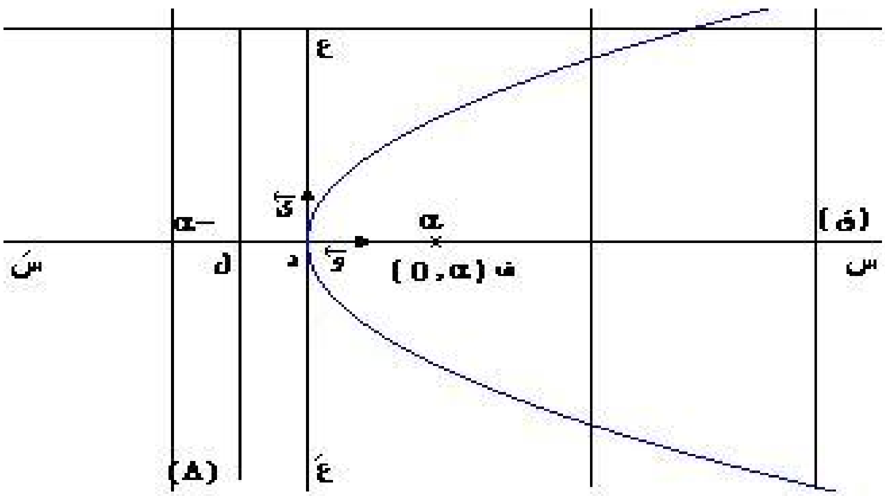
* **الحالة الثانية :** إذا كان المستقيم (ق) هو محور الفواصل سَ م س وكانت الذروة ذ(0،0) هي مبدأ المعلم الجديد $(\text{ذ}،\vec{\text{و}}،\vec{\text{ي}})$. فإن إحداثيي البؤرة ف هما $(\alpha\,،\,0)$ ومعادلة الدليل هي :

س = $-\alpha$ حيث $\alpha \neq 0$.

ومنه معادلة القطع المكافئ (Γ) هي: $(س-\alpha)^2 + (ع+0)^2 = (س+\alpha)^2$ (حسب 4 − 1) فنجد :

$س^2 - 2\alpha س + \alpha^2 + ع^2 = س^2 + 2\alpha س + \alpha^2 \Leftrightarrow ع^2 = 4\alpha س$.

أي : $\boxed{س = \frac{ع^2}{4\alpha}}$ هي المعادلة المبسطة للقطع المكافئ (Γ) الذي محوره سَ م س



4 − 2 −1 − مثال :

أكتب معادلة القطع المكافئ (Γ) الذي بؤرته ف (−2 ، 0) ودليله (Δ) معادلته : س = 2.

ثم أرسمه في معلم متعامد ومتجانس (م ، وَ ، يَ).

الحل :

لدينا من أجل كل نقطة ن(س ، ع) من القطع المكافئ (Γ) العلاقة التالية :

$(س+2)^2 + (ع-0)^2 = (س-2)^2$.

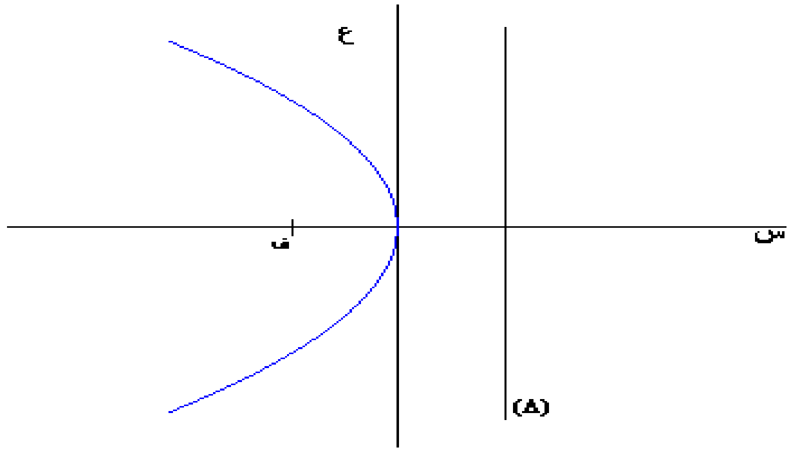
نجد : $\Leftrightarrow س^2 + 4س + 4 + ع^2 = س^2 - 4س + 4$

ومنه $ع^2 = -8$ س

وهي معادلة القطع المكافئ (Γ).

رسم المنحنى (Γ) :

س	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-2
ع	2	-2	$+4$	-4

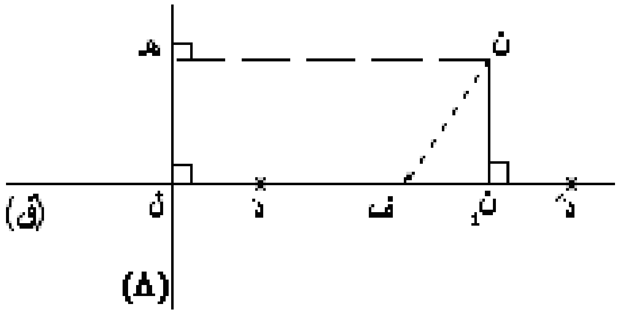


5 – تعاريف القطع الناقص و القطع الزائد :

إذا كان العدد ك $\neq 1$ فإن $(\Gamma) = \left\{ \text{ن} / \text{ن} \in (\pi) \text{ و } \frac{\text{ن ف}}{\text{ن هـ}} = \text{ك} \right\}$ حيث النقطة هـ المسقط العمودي للنقطة ن على المستقيم (Δ) ولتكن النقطة ل المسقط العمودي للنقطة ف على المستقيم (Δ) والمستقيم (ق) هو محور تناظر للمنحني (Γ) مع ن ف = ك.ن هـ . ك عدد حقيقي موجب تماما ولتكن النقطة ذ مركز الأبعاد المتناسبة للجملة {(ل ،ك) ، (ف ،+1)} والنقطة ذَ مركز الأبعاد المتناسبة للجملة{(ل ،ك) ، (ف ، −1)}

وَ منه نجد :

$$\begin{cases} \text{ك}.\overrightarrow{\text{ذ ل}} + \overrightarrow{\text{ذ ف}} = \vec{0} & \text{......}(1) \\ \text{ك}.\overrightarrow{\text{ذَ ل}} - \overrightarrow{\text{ذَ ف}} = \vec{0} & \text{......}(2) \end{cases}$$



لدينا ن ف = ك .ن هـ بما أن الطرفين موجبين نجد :

$\text{ن ف} = \text{ك}.\ \text{ن هـ} \Leftrightarrow \text{ن ف}^2 = \text{ك}^2.\ \text{ن هـ}^2$

ولنعتبر ن_1 المسقط العمودي للنقطة ن على المستقيم (ق).

إذن : $\text{ن ف}^2 = \text{ك}^2 .\ \text{ن}_1\text{ ل}^2$ (لأن $\text{ن}_1\text{ ل} = \text{ن هـ}$).

ونعلم أن $\text{ن ف}^2 = \text{ن ن}_1^2 + \text{ن}_1\text{ ف}^2$ (حسب علاقة فيتاغورس)

وبالتالي $\text{ن ن}_1^2 + \text{ن}_1\text{ ف}^2 = \text{ك}^2\ \text{ن}_1\text{ ل}^2$ و منه :

$$\boxed{\text{ن ن}_1^2 = \text{ك}^2\ \text{ن}_1\text{ ل}^2 - \text{ن}_1\text{ ف}^2 \ ....(3)}$$

من العلاقتين (1) و (2) وحسب علاقة شال ينتج ما يلي :

$$\begin{cases} \text{ك}.\left(\overleftarrow{\text{ذ ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}}\right) + \left(\overleftarrow{\text{ذ ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}}\right) = \vec{0} & ....(1') \\ \text{ك}.\left(\overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}}\right) - \left(\overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}}\right) = \vec{0} & ......(2') \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ذ ن}_1} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} + \overleftarrow{\text{ذ ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} = \vec{0} \\ \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} - \overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} = \vec{0} \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} (\text{ك} + 1)\ \overleftarrow{\text{ذ ن}_1} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} = \vec{0} & ....(1'') \\ (\text{ك} - 1)\ \overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} - \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} = \vec{0} & ....(2'') \end{cases}$$

نجد :

$$\begin{cases} (\text{ك} + 1)\ \overleftarrow{\text{ذ ن}_1} = -\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} - \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} \\ (\text{ك} - 1)\ \overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} = -\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} \end{cases}$$

بما أن $\overleftarrow{\text{ذ ن}_1} = -\overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ذ}}$ وَ $\overleftarrow{\text{ذَ ن}_1} = -\overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ذَ}}$

يكون :

$$\begin{cases} (\text{ك} + 1)\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ذ}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} & .... (1''') \\ (\text{ك} - 1)\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ذَ}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ل}} - \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ ف}} & .... (2''') \end{cases}$$

وبضرب (طرف لطرف) المعادلتين (1̄) وَ (2) نجد :

$$\left(ك^{2}-1\right)\overrightarrow{ن_{1}ذ}\cdot\overrightarrow{ن_{1}ذَ}=ك^{2}\cdot ن_{1}ل^{2}-ن_{1}ف^{2} \qquad (4)$$

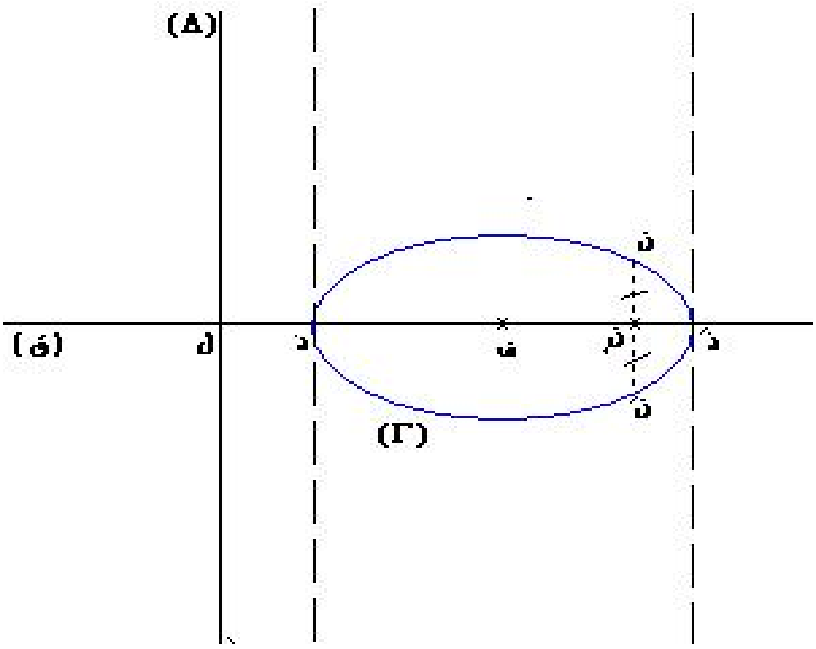
نستنتج من العلاقتين (3) وَ (4)

$$ن_{1}ن^{2}=\left(ك^{2}-1\right)\overrightarrow{ن_{1}ذ}\cdot\overrightarrow{ن_{1}ذَ} \qquad (5)$$

ولنبحث عن مجموعة النقط ن. نلاحظ طرفي العلاقة (5) موجبين حيث الطرف الثاني جداء عددين حقيقيين أحدهما $ك^{2}-1$ غير معدوم لأن $ك \neq 1$ ومنه نميز حالتين.

*** المناقشة :**

* **الحالة الأولى :** إذا كان العدد $ك^{2}-1<0$ أي $0<ك<1$ فمن العلاقة (5) نستنتج أن الجداء السلمي : $\overrightarrow{ن_{1}ذ}\cdot\overrightarrow{ن_{1}ذَ}\leq 0$ (لأن الطرف الأول للعلاقة (5) موجب). فتكون مجموعة النقط $ن_{1}$ من القطعة $[ذَ\ ذ]$ و بما أن النقطة $ن_{1}$ هي مسقط النقطتين ن ، نَ من المنحني (Γ) والمتناظرتين بالنسبة للمستقيم (ق) . ومنه مجموعة النقط ن تقع داخل الشريط المحدد بالمستقيمين العموديين على المستقيم (ق) عند النقطتين ذ و ذَ. نسمي المنحني (Γ) في هذه الحالة قطعاً ناقصاً. (أنظر الشكل)

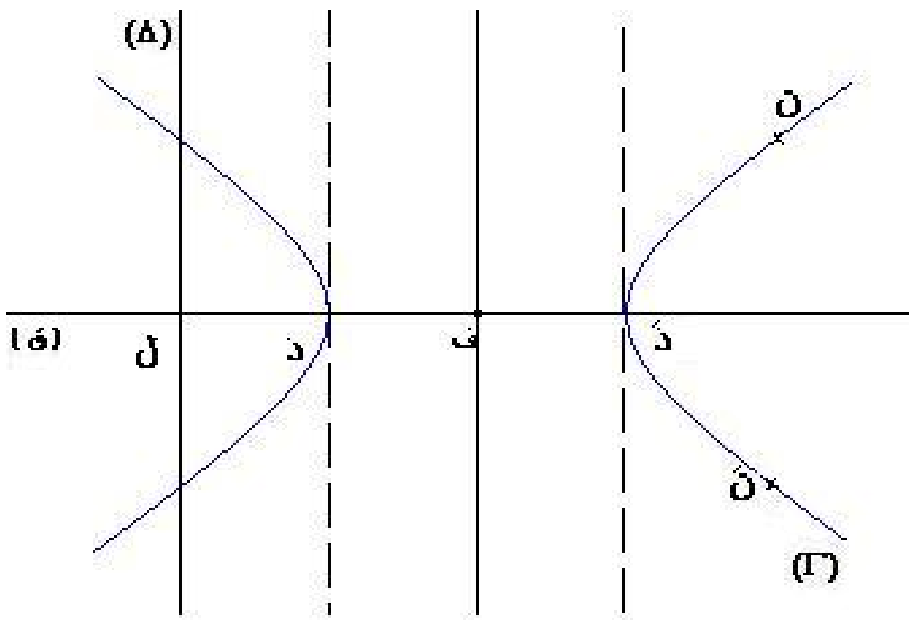


5 – 1 تعريف القطع الناقص :

إذا أعطيت نقطة ثابتة ف ومستقيم (Δ) في المستوي (π) لا يشمل ف فإن مجموعة النقط ن من المستوي (π) التي تحقق العلاقة : ن ف = ك. ن هـ حيث 0 〈 ك 〈 1 وَ هـ المسقط العمودي للنقطة ن على المستقيم (Δ)، نسميها قطعا ناقصا بؤرته (أو محرقه) النقطة ف ودليله المستقيم (Δ) ومحوره المستقيم (ق).

*** الحالة الثانية :**

إذا كان : ك^2 $-1 \rangle 0$ أي ك $\rangle 1$ ومن العلاقة (5) نستنتج أيضا أن الجداء السلمي $\overrightarrow{ن_1ذ} \cdot \overrightarrow{ن_1ذَ} \leq 0$ تكون مجموعة النقط ن$_1$ في هذه الحالة خارج الشريط المحدد بالمستقيمين العموديين على المستقيم (ق) عند النقطتين ذ و ذَ وتسمى مجموعة النقط ن في هذه الحالة قطع زائد.



5 – 2 – تعريف القطع الزائد :

إذا كان في المستوي (π) نقطة ثابتة ف ومستقيم معلوم (Δ) لا يشمل النقطة ف فإن مجموعة النقط ن التي تحقق العلاقة ن ف = ك . ن هـ حيث ك $\rangle 1$ تسمى قطع زائد بؤرته النقطة ف ودليله المستقيم (Δ).

6 – معادلتا القطع الناقص والقطع الزائد :

في المستوي (π) المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(\text{م} ، \overrightarrow{\text{و}} ، \overrightarrow{\text{ي}})$ نفرض أن المبدأ م هو منتصف القطعة $[\text{ذ ذَ}]$ وليكن المستقيم (ق) هو محور الفواصل سَ م س. إذن إحداثيات النقطتين ذ و ذَ هما على الترتيب : (−أ ، 0) وَ (أ ، 0).

لدينا من العلاقة (5) : $\text{ن ن}_1^{\,2} = (\text{ك}^2 - 1)\,\overrightarrow{\text{ن}_1\text{ذ}}\cdot\overrightarrow{\text{ن}_1\text{ذَ}}$. بوضع إحداثيي النقطة ن(س ، ع) يكون إحداثيا النقطة ن_1(س ، 0) و مركبتا الشعاع $\overrightarrow{\text{ن}_1\text{ن}}\begin{pmatrix}0\\ \text{ع}\end{pmatrix}$ ومنه

$$\overrightarrow{\text{ن}_1\text{ذ}}\cdot\overrightarrow{\text{ن}_1\text{ذَ}} = (\text{أ} - \text{س})\,(-\text{أ} - \text{س}) = \text{س}^2 - \text{أ}^2$$

وكذلك $\text{ن ن}_1^{\,2} = \text{ع}^2$ نستنتج إذن :

$$\boxed{\text{ع}^2 = (\text{ك}^2 - 1)\,(\text{س}^2 - \text{أ}^2).}$$

هي العلاقة التي يحققها إحداثيا كل نقطة ن من القطع المخروطي (Γ) حيث $\text{ك} \neq 1$.

ولنبحث عن البؤرة ف والدليل (Δ) :

لدينا :
$$\begin{cases} \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ذ ل}} + \overrightarrow{\text{ذ ف}} = \vec{0} \\ \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ذَ ل}} - \overrightarrow{\text{ذَ ف}} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{I})$$

وبوضع $(\text{س}_{\text{ل}} ، \text{ع}_{\text{ل}})$ إحداثيي النقطة ل و$(\text{س}_{\text{ف}} ، \text{ع}_{\text{ف}})$ إحداثيي النقطة ف تكون مركبات الأشعة :

$$\overrightarrow{\text{ذ ل}}\begin{pmatrix}\text{س}_{\text{ل}} + \text{أ}\\ 0\end{pmatrix} ، \overrightarrow{\text{ذ ف}}\begin{pmatrix}\text{س}_{\text{ف}} + \text{أ}\\ 0\end{pmatrix} ، \overrightarrow{\text{ذَ ل}}\begin{pmatrix}\text{س}_{\text{ل}} - \text{أ}\\ 0\end{pmatrix} ، \overrightarrow{\text{ذَ ف}}\begin{pmatrix}\text{س}_{\text{ف}} - \text{أ}\\ 0\end{pmatrix}$$

ومن الجملة (I) وبعد التعويض نجد :

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ك}\,(\text{س}_{\text{ل}} + \text{أ}) + (\text{س}_{\text{ف}} + \text{أ}) = 0 \ldots\ldots (1) \\ \text{ك}\,(\text{س}_{\text{ل}} - \text{أ}) - (\text{س}_{\text{ف}} - \text{أ}) = 0 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ك}\,\text{س}_{\text{ل}} + \text{ك}\,\text{أ} + \text{س}_{\text{ف}} + \text{أ} = 0 \ldots\ldots (1)' \\ \text{ك}\,\text{س}_{\text{ل}} - \text{ك}\,\text{أ} - \text{س}_{\text{ف}} - \text{أ} = 0 \ldots\ldots (2)' \end{cases}$$

بالجمع طرفًا لطرف للمعادلتين (1) و (2) نجد : 2 ك س + 2 أ = 0 وَ منه $س = -\frac{أ}{ك}$ (لأن ك ≠ 0) وبما أن ل نقطة من سَ م س فإن $ع_{ل} = 0$ نستنتج إحداثيي النقطة ل هما $(-\frac{أ}{ك}، 0)$.

وَ هذه المرة بالطرح طرفًا لطرف للمعادلتين (1) وَ (2) نجد : 2 ك أ + 2 $س_{ف}$ = 0

وَ منه $س_{ف}$ =–كأ إذن إحداثيي البؤرة ف هما (– كأ ، 0).

أما الدليل (Δ) معادلته هي : $س = -\frac{أ}{ك}$ لأن المستقيم (Δ) يشمل النقطة ل$(-\frac{أ}{ك}، 0)$ وَيوازي محور الترتيب عَ م ع.

*** نتيجة 1 :**

إذا كان ك ≠ 1 فإن القطع المخروطي (Γ) يقبل في المستوي (π) المزود بالمعلم المتعامد وَالمتجانس(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) (حيث المبدأ م هو منتصف القطعة [ذَ ذ] بؤرة ف (– ك أ ، 0) ودليلاً (Δ) معادلته $س = -\frac{أ}{ك}$.

6 – 1 معادلة القطع الناقص :

لدينا معادلة الناقص (Γ) : $ع^2 = (ك^2 - 1)(س^2 - أ^2)$ حيث : 0 ⟨ ك ⟨ 1 وَبؤرته ف (– ك أ ، 0). نضع – ك أ = جـ نجد : $ك = -\frac{جـ}{أ}$.

ويكون : $ك^2 - 1 = \frac{جـ^2}{أ^2} - 1$ ونضع $\frac{جـ^2 - أ^2}{أ^2} = -\frac{ب^2}{أ^2}$ لأن $جـ^2 - أ^2$ ⟨ 0 علما أن $ك^2 - 1$ ⟨ 0 إذن : $ع^2 = -\frac{ب^2}{أ^2}(س^2 - أ^2)$ بتعويض $ك^2 - 1$ بقيمته نحصل على المعادلة : $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ع^2}{ب^2} = 1$ وهي معادلة القطع الناقص

الذي محوره سَ م س وَ بؤرته ف (جـ ، 0) وَدليله (Δ) معادلته $س = -\frac{أ}{ك}$. مع .

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

*** نتيجة 2 :**

القطع الناقص (Γ) الذي محوره سَ م س وَذروتاه ذ (− أ ، 0) ، ذَ (أ ، 0) له معادلة من الشكل : $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ع^2}{ب^2} = 1$ حيث بؤرته ف(جـ ، 0) وَدليله (Δ) معادلته :

$س = -\frac{أ}{ك}$ مع $جـ^2 = أ^2 - ب^2$.

نلاحظ أن أ 〉 ب لأن $أ^2 - ب^2 〉 0$ وَالعدد جـ يأخذ قيمتين $جـ = \sqrt{أ^2 - ب^2}$ أو $جـ = -\sqrt{أ^2 - ب^2}$ أي توجد بؤرتان ف (جـ ، 0) ف (− جـ ، 0) وَدليلين (Δ) وَ(Δ') معادلتيهما على الترتيب : $س = -\frac{أ}{ك}$ وَ $س = \frac{أ}{ك}$.

6 – 2 – معادلة القطع الزائد :

لدينا معادلة القطع الزائد (Γ) : $ع^2 = (ك^2 - 1)(س^2 - أ^2)$ حيث ك>1 وَ بؤرته ف (− ك أ ، 0) بوضع − ك أ = جـ نجد $ك = -\frac{جـ}{أ}$ ويكون : $ك^2 - 1 = \frac{جـ^2}{أ^2} - 1$ أو

$ك^2 - 1 = \frac{جـ^2 - أ^2}{أ^2}$

وَمنه $\frac{جـ^2 - أ^2}{أ^2} = \frac{ب^2}{أ^2}$ (لأن $جـ^2 - أ^2 〉 0$)

إذن $ع^2 = \frac{ب^2}{أ^2}(س^2 - أ^2) \Leftrightarrow \frac{ع^2}{ب^2} = \frac{س^2}{أ^2} - 1$ نحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ع^2}{ب^2} = 1}$$

هي معادلة القطع الزائد الذي محوره سَ م س وبؤرته ف (جـ ، 0) وَمعادلة دليله (Δ) :

$س = -\frac{أ}{ك}$ حيث $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

*** نتيجة 3 :**

القطع الزائد الذي محوره سَ م س وبؤرته ف (جـ ، 0) يقبل معادلة من الشكل :

$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ع^2}{ب^2} = 1$ وَدليلا (Δ) معادلته $س = -\frac{أ}{ك}$

*** نتيجة عامة :**

من النتائج (1) للبند (1– 4) وَ (2) للبند (6 – 1) وَ (3) للبند (6 – 2) نستخلص أن لكل قطع مخروطي (Γ) معادلته من الشكل التالي :

أ س^2 + ب ع^2 + 2 جـ س ع + 2 د س + 2 هـ ع + و = 0 حيث :

أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، وأعداد حقيقية كيفية.

6 – 3 تعريف آخر للقطع المخروطي :

في المستوي (π) المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) نسمي قطعا مخروطيا كل منحني(Γ) إحداثيات مجموعة نقطه ن (س ، ع) تحقق العلاقة التالية :

$\boxed{\text{أ س}^2 + \text{ب ع}^2 + 2\ \text{جـ س ع} + 2\ \text{د س} + 2\ \text{هـ ع} + \text{و} = 0}$

***ملاحظة :**

لنعتبر القطع المخروطي(Γ) في المعلم(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) ذي المعادلة :

أ س^2 + ب ع^2 + 2 جـ س ع + 2 د س + 2 هـ ع + و = 0 ....(I)

يمكننا أن نفرض دوماً جـ = 0 لأنه يوجد دوما معلما متعامداً ومتجانسًا $\left(\omega ، \overleftarrow{وَ} ، \overleftarrow{يَ}\right)$ ناتج على المعلم الأول(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) بواسطة الدوران ذي العبارة التحليلية :

$$\begin{cases} \text{س} = \text{سَ}\ \text{تجب}\ \theta - \text{عَ}\ \text{جب}\theta \\ \text{ع} = \text{سَ}\ \text{جب}\ \theta - \text{عَ}\ \text{تجب}\ \theta \end{cases} \quad \text{مع} \quad \begin{cases} \overleftarrow{\text{وَ}} = \overleftarrow{\text{و}}\ \text{تجب}\ \theta + \overleftarrow{\text{ي}}\ \text{جب}\ \theta \\ \overleftarrow{\text{يَ}} = -\overleftarrow{\text{و}}\ \text{جب}\ \theta + \overleftarrow{\text{ي}}\ \text{تجب}\ \theta \end{cases}$$

تكون في هذه الحالة المعادلة (I) كما يلي :

أ سَ^{2} + بَ عَ^{2} + 2 جَ سَ عَ + 2 دَ سَ + 2 هَ عَ + وَ = 0 بحيث يكون :

جَ = (أ – ب) جب 2θ + 2 د تجب 2θ وهنا يتم الاختيار لقيمة العدد θ المناسبة للحصول على قيمة معدومة للعدد جَ أي جَ = 0

وهكذا نعمم ونستخلص أن لكل قطع مخروطي (Γ) معادلة من الشكل :

أ س^2 + ب ع^2 + 2 جـ س + 2د ع + هـ = 0

حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية مميزة عن القيم المذكورة سابقا في العلاقة (Γ)

* **المناقشة :**

لنبحث عن مجموعة النقط ن التي إحداثيي كل منها (س،ع) تحقق العلاقة :

$أ\,س^2 + ب\,ع^2 + \frac{\lambda}{أ\,ب} = 0$ حيث أ ، ب ، λ أعداد حقيقية وهنا نميز عدة حالات

حسب إشارة أ وَ ب وإشارة وقيمة العدد λ.

الحالة الأولى : أ وَ ب لهما نفس الإشارة عندئذ يكون أ . ب $\rangle$ 0 ومنه نستنتج ما يلي :

لدينا : $أ\,س^2 + ب\,ع^2 + \frac{\lambda}{أ\,ب} = 0 \Leftrightarrow أ\,س^2 + ب\,ع^2 = -\frac{\lambda}{أ\,ب}$ ....(I) ولنفرض

أن العددين أ وَ ب موجبين تماما.

– إذا كان $\lambda \rangle 0$ يكون الطرف الأول للمساواة (I) موجبا أو معدوماً والطرف الثاني سالباً تماماً. إذن مجموعة النقط ن هي مجموعة خالية.

– إذا كان $\lambda = 0$ يكون الطرف الأول للمعادلة (I) موجبًا أو معدوما وبالتالي نجد س= 0 و ع = 0

إذن مجموعة النقط ن هي نقطة واحدة $\omega\left(-\frac{جـ}{أ}، -\frac{د}{ب}\right)$

–إذا كان $\lambda \langle 0$ نجد ما يلي :

$$(I) \Leftrightarrow \frac{أ\,س^2}{-\frac{\lambda}{أ\,ب}} + \frac{ب\,ع^2}{-\frac{\lambda}{أ\,ب}} = +1 \Leftrightarrow \frac{س^2}{-\frac{\lambda}{أ^2\,ب}} + \frac{ع^2}{-\frac{\lambda}{أ\,ب^2}} = +1$$

بوضع $\alpha = \sqrt{-\frac{\lambda}{أ^2\,ب}}$ وَ $\beta = \sqrt{-\frac{\lambda}{أ\,ب^2}}$ تكون المعادلة كما يلي :

$\frac{س^2}{\alpha^2} + \frac{ع^2}{\beta^2} = +1$ حيث α و β عددين حقيقيين موجبين تماما إذن مجموعة النقط ن هي قطع ناقص.

* **ملاحظة :**

نجد نفس النتيجة إذا كان أ وَ ب عددين سالبين معا.

الحالة الثانية : إذا كان العددان أ وَ ب مختلفين في الإشارة عندئذ يكون أ ب< 0.

لدينا سابقا $أ\,س^2 + ب\,ع^2 = -\frac{\lambda}{أ\,ب}$ . . . . . . (3).

بما أن العددين أ وَ ب مختلفان في الإشارة نفرض أن أ >0

و ب < 0 وَ نضع بَ = – ب يكون ب = – بَ مع بَ > 0 نجد :

(3) $\text{أ}\,\text{س}^2 - \text{ب}\,\text{ع}^2 = \dfrac{\lambda}{\text{أ}\,\text{بَ}}$ ⟺ . . . . (3) حيث أ و بَ عددين موجبين تمامًا وَ λ

عدد حقيقي كيفي ومنه نلاحظ ما يلي :

* إذا كان $\lambda = 0$ فإن المعادلة (3) تكون كالآتي :

$\text{أ}\,\text{س}^2 - \text{بَ}\,\text{ع}^2 = 0$ و منه :

$$\text{أ}\,\text{س}^2 - \text{بَ}\,\text{ع}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\text{أ}}\,\text{س} - \sqrt{\text{بَ}}\,\text{ع}\right)\left(\sqrt{\text{أ}}\,\text{س} + \sqrt{\text{بَ}}\,\text{ع}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\text{أ}}\,\text{س} - \sqrt{\text{بَ}}\,\text{ع} = 0 \\ \sqrt{\text{أ}}\,\text{س} + \sqrt{\text{بَ}}\,\text{ع} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ع} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{بَ}}}\,\text{س} \quad \text{أو} \quad \text{ع} = -\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{بَ}}}\,\text{س}.$$

وهما معادلتين لمستقيمين في متقاطعين في المبدأ $\omega\left(-\dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}, -\dfrac{\text{د}}{\text{ب}}\right)$.

إذن المنحني(Γ) هو إتحاد المستقيمين المتقاطعين في النقطةω والمتناظران بالنسبة لمحوري الإحداثيات.

* إذا كان العدد $\lambda \rangle 0$ فإن (3) $\Leftrightarrow \dfrac{\text{أ}\,\text{س}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ}\,\text{بَ}}} - \dfrac{\text{بَ}\,\text{ع}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ}\,\text{بَ}}} = +1$

نجد (3) $\Leftrightarrow \dfrac{\text{س}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ}^2\,\text{بَ}}} - \dfrac{\text{ع}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ}\,\text{بَ}^2}} = +1$ حيث

العددين $\dfrac{\lambda}{\text{أ}^2\,\text{بَ}}$ وَ $\dfrac{\lambda}{\text{أ}\,\text{بَ}^2}$ موجبين تماما.

بوضع $\alpha = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\text{أ}^2\,\text{بَ}}}$ وَ $\beta = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\text{أ}\,\text{بَ}^2}}$

تكون (3) $\Leftrightarrow \dfrac{\text{س}^2}{\alpha^2} - \dfrac{\text{ع}^2}{\beta^2} = 1$ وهي معادلة قطع زائد.

إذن مجموعة النقط ن هي قطع زائد.

* إذا كان $\lambda \langle 0$ فإن :

$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{ع}^2 = -\frac{\lambda}{\text{أ}\,\text{ب}} \Leftrightarrow \frac{\text{أ}\,\text{س}^2}{-\frac{\lambda}{\text{أ}\,\text{ب}}} + \frac{\text{ب}\,\text{ع}^2}{-\frac{\lambda}{\text{أ}\,\text{ب}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\text{س}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ}^2\,\text{ب}}} + \frac{\text{ع}^2}{-\frac{\lambda}{\text{أ ب}^2}} = 1$$

حيث $\frac{\lambda}{\text{أ ب}}$ عدد موجب لأن λ 〈 0 وَ ب 〈 0 وَ أ 〈 0 و بالتالي $-\frac{\lambda}{\text{أ ب}}$ 〈 0

بوضع $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{\text{أ ب}}}$ وَ $\beta = \sqrt{-\frac{\lambda}{\text{أ ب}^2}}$ نجد :

$$-\frac{\text{س}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ ب}}} + \frac{\text{ع}^2}{\frac{\lambda}{\text{أ ب}^2}} = 1 \Leftrightarrow -\frac{\text{س}^2}{\alpha^2} + \frac{\text{ع}^2}{\beta^2} = 1$$

وهي أيضا معادلة قطع زائد بتغيير س بِ ع.

7 – تصنيف القطوع المخروطية :

في كل ما يأتي $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ معلم متعامد ومتجانس وَ (Γ) قطع مخروطي معادلته :

أ س^2 + ب ع^2 + 2 جـ س + 2 د ع + هـ = 0

*** ملاحظة :**

نستبعد الحالة يكون فيها أ = ب وغير معدومين معا لأن لمجموعة (Γ) في هذه الحالة إن لم تكن دائرة فهي نقطة أو مجموعة خالية وهو ما دُرِس في السنة الثانية. وسؤالنا الآن : ما هي طبيعة مجموعة النقط ن التي إحداثيي كل منها (س ، ع) تحقق العلاقة المختصرة الآتية : أ س^2 + ب ع^2 + 2 جـ س + 2 د ع + هـ = 0 . . . . . (1) حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية مع أ وَ ب مختلفين وهكذا تُصنف القطوع المخروطية إلى صنفين : القطوع المخروطية ذات المركز، القطوع المخروطية بدون مركز.

7 – 1 – القطوع المخروطية ذات المركز :

إذا كان أ ب ≠ 0 (أي أ وَ ب غير معدومين) نجد :

$$(1) \Leftrightarrow أ\left(س^2 + 2\frac{جـ}{أ}س\right) + ب\left(ع^2 + 2\frac{د}{ب}ع\right) + هـ = 0 \quad (\text{لأن } أ \neq 0 \text{ وَ } ب \neq 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow أ\left[\left(س + \frac{جـ}{أ}\right)^2 - \left(\frac{جـ}{أ}\right)^2\right] + ب\left[\left(ع + \frac{د}{ب}\right)^2 - \left(\frac{د}{ب}\right)^2\right] + هـ = 0$$

$$\Leftrightarrow أ\left(س + \frac{جـ}{أ}\right)^2 - \frac{جـ^2}{أ} + ب\left(ع + \frac{د}{ب}\right)^2 - \frac{د^2}{ب} + هـ = 0$$

$$\Leftrightarrow أ\left(س + \frac{جـ}{أ}\right)^2 + ب\left(ع + \frac{د}{ب}\right)^2 + \frac{-جـ^2ب - د^2أ + هـ أ ب}{أ ب} = 0$$

بوضع $سَ = س + \frac{جـ}{أ}$ ، $عَ = ع + \frac{د}{ب}$ و $\lambda = -جـ^2ب - د^2أ + هـ أ ب$.

تصبح المعادلة (1) كالآتي :

$أ سَ^2 + ب عَ^2 + \frac{\lambda}{أ ب} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$ وهي معادلة القطع المخروطي (Γ) في المعلم الجديد $(\omega ، \vec{و} ، \vec{ي})$.

حيث $\omega\left(-\frac{جـ}{أ} ، -\frac{د}{ب}\right)$ تسمى مركز تناظر للمنحني (Γ) أو مركز القطع المخروطي (Γ)

نتيجة :

يمكننا إعتبار مجموعة النقط ن التي إحداثياتها تحقق العلاقة (2) مجموعة صور النقط ن التي تحقق العلاقة (1) بواسطة الانسحاب ذو العبارة التحليلية الآتية :

$$\begin{cases} سَ = س + \frac{جـ}{أ} \\ عَ = ع + \frac{د}{ب} \end{cases}$$

7 – 2 القطوع المخروطية بدون مركز :

بما أن أ وَ ب عددين حقيقيين كيفيين فإذا كان أ ب = 0 يمكننا أن نفرض حالتين.

الحالة الأولى : $أ \neq 0$ وَ $ب = 0$ نجد

$أ س^2 + 2 جـ س + 2 د ع + هـ = 0 \ldots\ldots (1)$

إذن $(1) \Leftrightarrow -2 د ع = أ س^2 + 2 جـ س + هـ$.

لما د = 0 يكون $أ س^2 + 2 جـ س + هـ = 0$ و منه نحل هذه المعادلة وليكن مميزها $\Delta' = جـ^2 - أ هـ$ نستنتج ما يلي :

* إذا كان $\Delta' < 0$ مجموعة النقط ن هي مجموعة خالية.

* إذا كـان $\Delta' = 0$ مجموعـة الـنقط ن هـي مجموعة نقط المستقيم ذو المعادلة :

$$س = -\frac{جـ}{أ}$$

* إذا كـان $\Delta' \rangle 0$ مجموعة النقط ن هي إتحاد المستقيمين ذا المعادلتين :

$$س = \frac{-جـ + \sqrt{\Delta'}}{أ} \quad ، \quad س = \frac{-جـ - \sqrt{\Delta'}}{أ}$$

* لما د $\neq 0$ نجد (1) $\Leftrightarrow$ -2 د ع $=$ أ س^2 $+$ 2 جـ س $+$ هـ

$$\Leftrightarrow \quad ع = -\frac{أ}{2\,د} س^2 - \frac{جـ}{د} - \frac{هـ}{2\,د}$$

ومنه مجموعة النقط ن هي قطع مكافئ يقبل المستقيم ذو المعادلة

$س = -\frac{جـ}{أ}$ محور تناظر وذروته $\omega\left(-\frac{جـ}{أ} ، 0\right)$ (أنظر مقرر السنة الثانية).

* **الحالة الثانية** : إذا كان أ $= 0$ وَ ب $\neq 0$

لدينا أ س^2 + ب ع^2 + 2 جـ س + 2 د ع + هـ $= 0$ . . . . .(1) ومنه.

(1) ب ع^2 + 2 جـ س + 2 د ع + هـ $= 0$ $\big($ لأن أ $= 0$ و ب $\neq 0\big)$ $\Leftrightarrow$

(1) ع^2 + $\frac{2\,جـ}{ب}$ س + 2 $\frac{د}{ب}$ ع + $\frac{هـ}{ب}$ $= 0$ $\big($ لأن و ب $\neq 0\big)$ $\Leftrightarrow$

$$(1) \Leftrightarrow \left(ع + \frac{د}{ب}\right)^2 - \left(\frac{د}{ب}\right)^2 = -2\frac{جـ}{ب} س - \frac{هـ}{ب}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(ع + \frac{د}{ب}\right)^2 = -2\frac{جـ}{ب}\left(س - \frac{جـ^2 - هـ\,ب}{2\,جـ\,ب}\right)$$

بوضع $ع = ع + \frac{د}{ب}$ و $\lambda = -\frac{جـ}{ب}$ و $س = س - \frac{جـ^2 - هـ\,ب}{2\,جـ\,ب}$ يصبح

$\Leftrightarrow ع^2 = 2\,\lambda$ س ومنه :

* إذا كـان $\lambda = 0$ أي جـ $= 0$ يكون ع $= 0$ ومنه $ع^2 = -\frac{د}{ب}$ إذن مجموعة النقط ن هي

مجموعة نقط المستقيم يوازي محور الفواصل معادلته : $ع = -\frac{د}{ب}$

* إذا كـان $\lambda \neq 0$ يصبح (1) $\Leftrightarrow$ ع^2 $= 2\,\lambda$ س إذن مجموعة النقط ن هي قطع مكافئ.

8 – إنشاء القطوع المخروطية :

8 – 1 : إنشاء القطع الناقص : ليكن القطع الناقص (Γ) الذي معادلته $\frac{س^2}{\alpha^2}+\frac{ع^2}{\beta^2}=1$ حيث α ، β عددين موجبين في المعلم $(\omega، \vec{و}، \vec{ي})$ مع $\omega\left(-\frac{جـ}{أ}، -\frac{د}{ب}\right)$.

لدينا $\frac{س^2}{\alpha^2}+\frac{ع^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{ع^2}{\beta^2}=1-\frac{س^2}{\alpha^2}$

$$\Leftrightarrow ع^2=\beta^2\left(1-\frac{س^2}{\alpha^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow ع^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2-س^2\right)$$

$$\Leftrightarrow ع=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-س^2} \text{ أو } ع=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-س^2}$$

$$\text{وَ } -\alpha \le س \le \alpha$$

ولهذا نعتبر الدالتين العدديتين $تا_1$ وَ $تا_2$ المعرفتين على المجال $[-\alpha ، +\alpha]$ حيث :

$تا_1(س)=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-س^2}$ ، $تا_2(س)=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-س^2}$ نلاحظ ما يلي :

* $\forall$ س $\in [-\alpha ، \alpha]$: $تا_2(س)=-تا_1(س)$ نستنتج أن منحنيي الدالتين $تا_1$ و $تا_2$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل إذن يكفي دراسة $تا_1$ ورسم منحنيها لرسم منحني الدالة $تا_2$

* $\forall$ س $\in [-\alpha ، \alpha]$ ، E – س $\in [-\alpha ، \alpha]$ ، بحيث $تا_2(-س)=-تا_1(س)$

أي الدالة $تا_1$ زوجية إذن يكفي دراسة الدالة $تا_1$ على $[0 ، \alpha]$ حيث $\alpha > 0$

ونكمل بيان $تا_1$ بواسطة التناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

8-1-1 – دراسة الدالة $تا_1$:

* $ف_{تا_1}=[-\alpha ، \alpha]$ ومجال دراستها هو $[0 ، \alpha]$.

$تا_1$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0 ، \alpha[$.

* $\forall$ س $\in]0 ، \alpha[$: $تا_1(س) = \frac{\beta(-2س)}{2\alpha\sqrt{\alpha^2 - س^2}} = -\frac{\beta س}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - س^2}}$

بما أن $\alpha \rangle 0$ و $\beta \rangle 0$ وَ س $\in]0 ، \alpha[$ يكون $تاَ_1(س) \langle 0$ فالدالة $تا_1$ متناقصة تماما على المجال $]0 ، \alpha[$.

* دراسة قابلية الإشتقاق عند $س_0 = \alpha$ من اليسار :

* $\underset{س \leftarrow \alpha}{نها} \frac{تا_1(س) - تا_1(\alpha)}{س - \alpha} = \underset{س \leftarrow \alpha}{نها} \frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - س^2} - 1}{-(\alpha - س)}$

$= \underset{س \leftarrow \alpha}{نها} \frac{\beta^2 \left(\alpha^2 - س^2\right)}{-\alpha(\alpha - س)\sqrt{\alpha^2 - س^2}}$

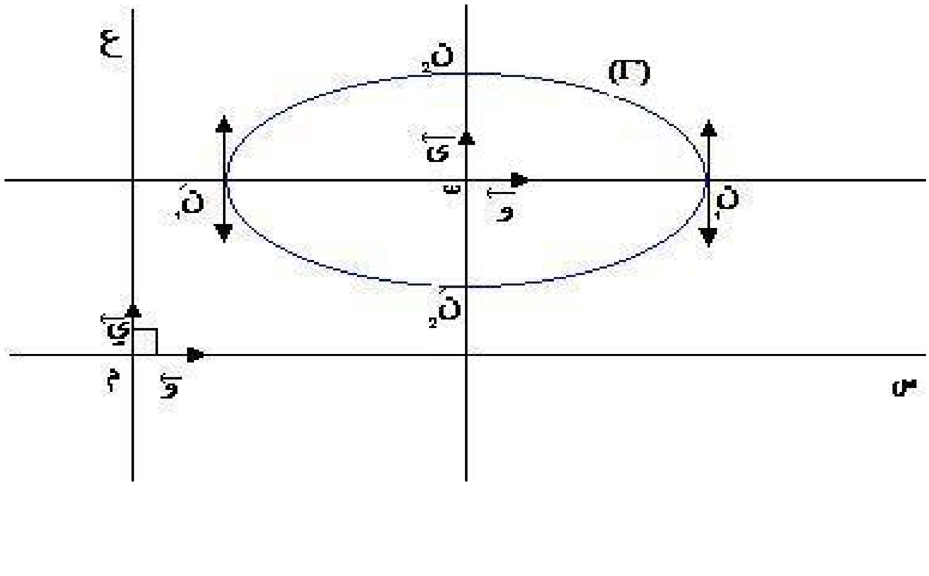
$= \underset{س \leftarrow \alpha}{نها} -\frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha + س}{\alpha^2 - س^2} = -\infty$

فالدالة $تا_1$ غير قابلة للأشتقاق على يسار $س_0 = \alpha$ ومنحنيها يقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب.

* جدول التغيرات للدالة $تا_1$:

س	0		α
$تاَ_1(س)$	0	−	$-\infty$
$تا_1(س)$	β		0

* رسم القطع الناقص (Γ) : لتكن النقط المساعدة $ن_1(\alpha، 0)$ ، $نَ_1(-\alpha، 0)$، $ن_2(0، \beta)$، $نَ_2(0، -\beta)$، $\omega\left(-\frac{جـ}{أ} ، -\frac{د}{ب}\right)$



يسمى المنحني (Γ) قطعا ناقصا محوره الكبير $ن_1 نَ_1$ وَ محوره الصغير $ن_2 نَ_2$ وَ هذا إذا كان : $\alpha \rangle \beta$.

8 – 1 – 2 – العناصر الأساسية للقطع الناقص :

إذا كان (Γ) قطعا ناقصا معادلته في المعلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$: $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ع^2}{ب^2} = 1$ حيث $أ \rangle ب$ فإن للقطع الناقص (Γ) ما يلي :

1 – محور تناظر هما سَ م س و عَ م ع حيث سَ م س يسمى المحور الكبير و عَ م ع المحور الصغير ومركز التناظر هو المبدأ م.

2 – بؤرتان ف(جـ ، 0) ، فَ(–جـ ، 0) حيث $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ودليلين (Δ) و $(\acute{\Delta})$ معادلتيهما $س = \frac{أ}{ك}$ و $س = -\frac{أ}{ك}$ حيث $ك = \frac{جـ}{أ}$ وهو التباعد المركزي.

3 – أربعة ذرى هي : ذ(–أ ، 0) ، ذَ(أ ، 0) ، ط(0 ، ب) ، طَ(0 ، –ب) وهي نقط التقاطع مع محوري القطع الناقص.

4 – الدائرة التي قطرها المحور الكبير ذ ذَ وطوله 2أ تسمى الدائرة الرئيسية والدائرة التي قطرها المحور الصغير ط طَ وطوله 2ب تسمى الدائرة الثانوية.

3-1-8 الخاصية الأساسية للقطع الناقص :

تمرين :

إذا كان (Γ) قطعا ناقصا بؤرتاه ف ، فَ ودليله (Δ) وَ$(\acute{\Delta})$ فبين أنه :

$\forall$ ن $\in (\Gamma)$ ، ن ف + ن فَ = 2 أ حيث 2 أ هو طول المحور الكبير.

الحل :

لدينا ذ(-أ ، 0) ، ذَ(أ ، 0) ، ف(جـ ، 0) ، فَ(-جـ ، 0).

(Δ) معادلته : س = $-\frac{أ}{ك}$ ، $(\acute{\Delta})$ معادلته : س = $\frac{أ}{ك}$.

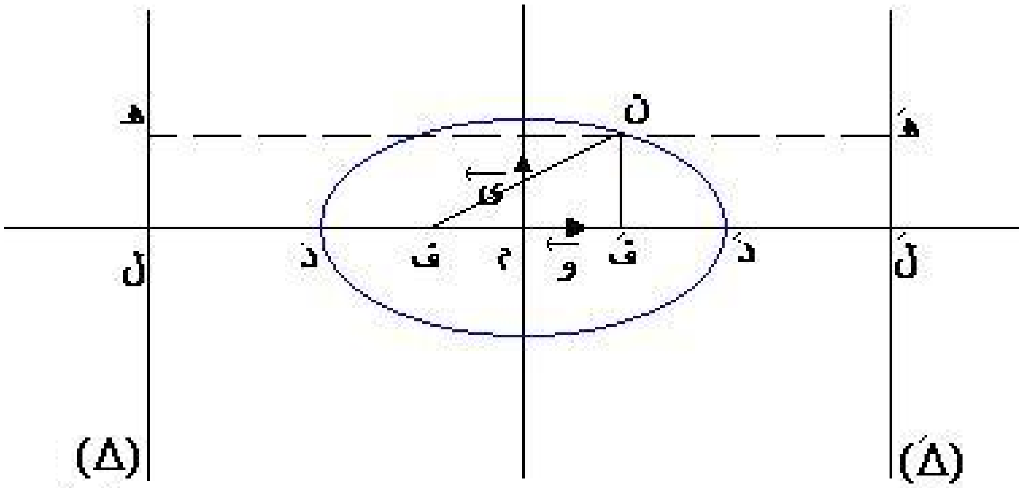
ون ف = ك.ن هـ حيث $0 \langle$ ك $\langle 1$ و هـ المسقط العمودي للنقطة ن على (Δ)

كذلك ن فَ = ك.ن هَ حيث هَ هي المسقط العمودي للنقطة ن على $(\acute{\Delta})$

إذن : ن ف = ك.ن فَ و ن فَ = ك.ن هَ $\Leftrightarrow$ ن ف + ن فَ = ك(ن هـ+ن هَ)

أي ن ف + ن فَ = ك. ل لَ لكن ل لَ= $\frac{أ}{ك}$ + $\frac{أ}{ك}$ = 2 $\frac{أ}{ك}$

نستنتج أن ن ف + ن فَ = 2أ.



نتيجة :

مجموع بعدي أي نقطة ن من القطع الناقص (Γ) على البؤرتين يساوي 2أ وهو طول المحور الكبير والعكس صحيح.

8 – 1 – 4 – نظرية :

إذا أعطيت في المستوي نقطتان ثابتتان ف ، فَ وكان أ طول معلوم حيث أ > 0 فإن مجموعة النقط ن من المستوي التي تحقق ن ف + ن فَ = 2أ هي قطع ناقص بؤرتاه ف و فَ ومحوره الكبير طوله 2أ.

8 – 2 إنشاء القطع الزائد :

ليكن القطع الزائد (Γ) الذي معادلته $\frac{س^2}{\alpha^2} - \frac{ع^2}{\beta^2} = 1$ في المعلم $(\omega ، \vec{و} ، \vec{ي})$

حيث. $\omega\left(-\frac{جـ}{أ} ، -\frac{د}{ب}\right)$.

لدينا $\frac{س^2}{\alpha^2} - \frac{ع^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{ع^2}{\beta^2} = -1 + \frac{س^2}{\alpha^2}$

$$\Leftrightarrow ع^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(س^2 - \alpha^2\right)$$

$$\Leftrightarrow ع = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 - \alpha^2} \quad \text{أو} \quad ع = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 - \alpha^2}$$

حيث س $\in]-\infty ، -\alpha] \cup [\alpha ، +\infty[$

لنعتبر الدالتين $تا_1$ و $تا_2$ المعرفتان على $]-\infty ، -\alpha] \cup [\alpha ، +\infty[$

حيث $تا_1(س) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 - \alpha^2}$ ، $تا_2(س) = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 - \alpha^2}$ نلاحظ ما يلي :

* $\forall$ س $تا_2(س) = -تا_1(س) \in]-\infty ، -\alpha] \cup [\alpha ، +\infty[$ نستنتج أن منحنيا الدالتين $تا_1$ و $تا_2$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل إذن يكفي دراسة الدالة $تا_1$ لرسم المنحني (Γ).

كذلك $\forall$ س $\in]-\infty ، -\alpha] \cup [\alpha ، +\infty[$ ،

$-س \in]-\infty ، -\alpha] \cup [\alpha ، +\infty[$ $تا_1(س) = تا_1(-س)$ إذن الدالة $تا_1$ زوجية وبالتالي يكفي دراسة الدالة $تا_1$ على المجال $[\alpha ، +\infty[$ ثم نكمل رسم المنحني للدالة $تا_1$ بواسطة التناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

8–2–1 دراسة الدالة $تا_1$

لدينا $فا_{تا_1} =]-\infty ، -\alpha] \cup [\alpha ، +\infty[$ ولندرسها على المجال $[\alpha ، +\infty[$ حيث $تا_1(\alpha) = 0$ و $\lim_{س \to +\infty} تا_1(س) = +\infty$.

الدالـــة تا_1 قابلـــة للإشـــتقاق علـــى المجـــال $]\alpha ، +\infty[$ حيـــث $\forall$ س $\in$ $]\alpha ، +\infty[$

$\text{تا}_1(\text{س}) = \dfrac{\beta\,\text{س}}{\alpha\sqrt{\text{س}^2 - \alpha^2}}$ ، α ، β عدديـن مـوجبين وَ $\forall$ س $\in$ $]\alpha ، +\infty[$ إذن نـجد

$\forall$ س $\in$ $]\alpha ، +\infty[$ $\text{تاَ}_1(\text{س}) \rangle 0$ فـالدالـــة تا_1 مـــتزايدة تـمامـــا علـــى الـمجـــال $]\alpha ، +\infty[$.

* دراسة قابلية الإشتقاق للدالـة تا_1 من أجل $\text{س}_0 = \alpha$ من اليمين .

$$\underset{\text{س} \overset{\rangle}{\to} \alpha}{\text{نـهـا}} \frac{\text{تا}_1(\text{س}) - \text{تا}_1(\alpha)}{\text{س} - \alpha} = \underset{\text{س} \overset{\rangle}{\to} \alpha}{\text{نـهـا}} \frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\text{س}^2 - \alpha^2}}{\text{س} - \alpha}$$

$$= \underset{\text{س} \overset{\rangle}{\to} \alpha}{\text{نـهـا}} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\sqrt{\text{س} - \alpha}\,\sqrt{\text{س} + \alpha}}{\text{س} - \alpha} \quad (\text{لأن } \text{س} \rangle 0)$$

$$= \underset{\text{س} \overset{\rangle}{\to} \alpha}{\text{نـهـا}} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\sqrt{\text{س} + \alpha}}{\sqrt{\text{س} - \alpha}} = +\infty$$

إذن الـدالــة تا_1 غـيـر قـابلــة لـلآشـتـقـاق علــى يـميـن α ومـنـحـنـيـهـا يـقـبـل نـصـف مـمـاس مـوازيـا لـمحـور الـتـراتـيب عـنـد يـمـين $\text{س}_0 = \alpha$ مـعـادلـتـه $\text{س} = \alpha$.

*** جـدول الـتـغـيـرات :**

س	α		$+\infty$
$\text{تاَ}_1(\text{س})$	$+\infty$	+	
تا_1	0	$\nearrow$	$+\infty$

دراسـة الـفـروع الـلانـهـائـيـة :

لـديـنـا $\underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نـهـا}} \text{تا}_1(\text{س}) = +\infty$ و لـهـذا نـدرس $\underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نـهـا}} \dfrac{\text{تـا}_1(\text{س})}{\text{س}}$

نـجـد $\underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نـهـا}} \dfrac{\text{تـا}_1(\text{س})}{\text{س}} = \underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نـهـا}} \dfrac{\beta}{\alpha} \dfrac{\sqrt{\text{س}^2 - \alpha^2}}{\text{س}} = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

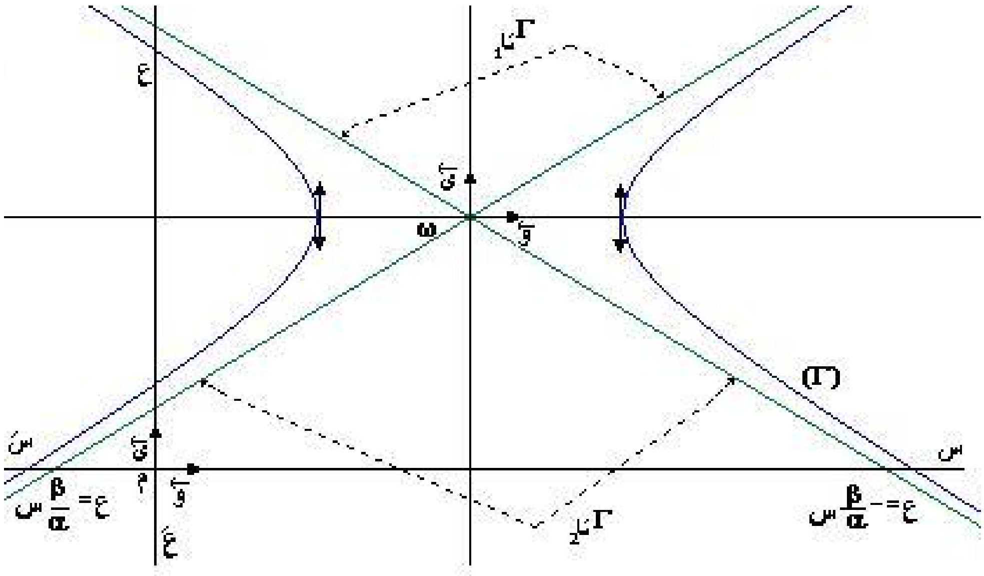
ثـم $\underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نـهـا}} \left(\text{تا}_1(\text{س}) - \dfrac{\beta}{\alpha}\text{س} \right) = \underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نـهـا}} \dfrac{-\beta\alpha}{\sqrt{\text{س}^2 - \alpha^2} + \text{س}} = 0$

إذن مـنـحـنــي الـدالــة تا_1 هـو فـرع لا نـهـائـي يـتـبـع خـط مـقـارب مـائـل مـعـادلـتـه $\text{ع} = \dfrac{\beta}{\alpha}\text{س}$

فـي جـوار $+\infty$.

(لاحظ ميل الخط المقارب موجب تماما) ويمر بالمبدأ $\omega\left(-\frac{جـ}{أ}، -\frac{د}{ب}\right)$ وَ $تا_1(\alpha) = 0$ إذن منحني الدالة $تا_1$ يقطع محور الفواصل.

* **رسم المنحني** (Γ) :



نستنتج أن $(\Gamma) = \left(\Gamma_{تا_1}\right) \cup \left(\Gamma_{تا_2}\right)$ وَ يسمى المنحني (Γ) قطع زائد مركزه $\omega\left(-\frac{جـ}{أ}، -\frac{د}{ب}\right)$ والمستقيمان : $ع = \frac{\beta}{\alpha}س$ و $ع = -\frac{\beta}{\alpha}س$ هما المستقيمان المقاربان للقطع الزائد و النقطتان ن$(\alpha ، 0)$ وَ نَ$(-\alpha ، 0)$ ذروتيه.

* ملاحظة : إذا كانت معادلة القطع الزائد من الشكل : $\frac{ع^2}{\beta^2} - \frac{س^2}{\alpha^2} = 1$

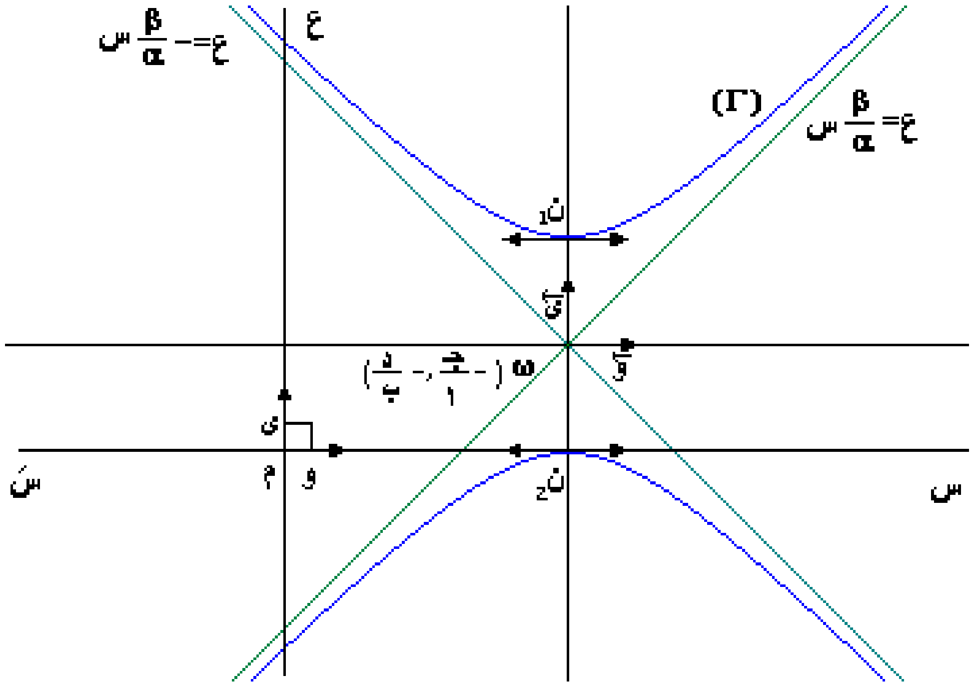
فإن : $\frac{ع^2}{\beta^2} - \frac{س^2}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow ع^2 = \beta^2\left(\frac{س^2}{\alpha^2} + 1\right)$

$\Leftrightarrow ع^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(س^2 + \alpha^2\right)$

$\Leftrightarrow ع = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 + \alpha^2}$ أو $ع = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 + \alpha^2}$ حيث س∈ ح

وبنفس الطريقة السابقة نضع $تا_1(س) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 + \alpha^2}$

و $تا_2(س) = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{س^2 + \alpha^2}$ نجد مجموعة تعريف $فا_{تا} = ج$ والمنحني (Γ) هو قطع زائد ذروتيه هما $ن_2(0 ، \beta)$ و $نَ_2(0 ، -\beta)$ و المستقيمان المقاربان معادلتيهما : $ع = \frac{\beta}{\alpha}$ س وَ $ع = -\frac{\beta}{\alpha}$ س .



8 – 2 – 2 العناصر الأساسية للقطع الزائد :

إذا أعطي قطع زائد (Γ) معادلته : $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ع^2}{ب^2} = 1$ فإن للقطع الزائد (Γ) العناصر التالية :

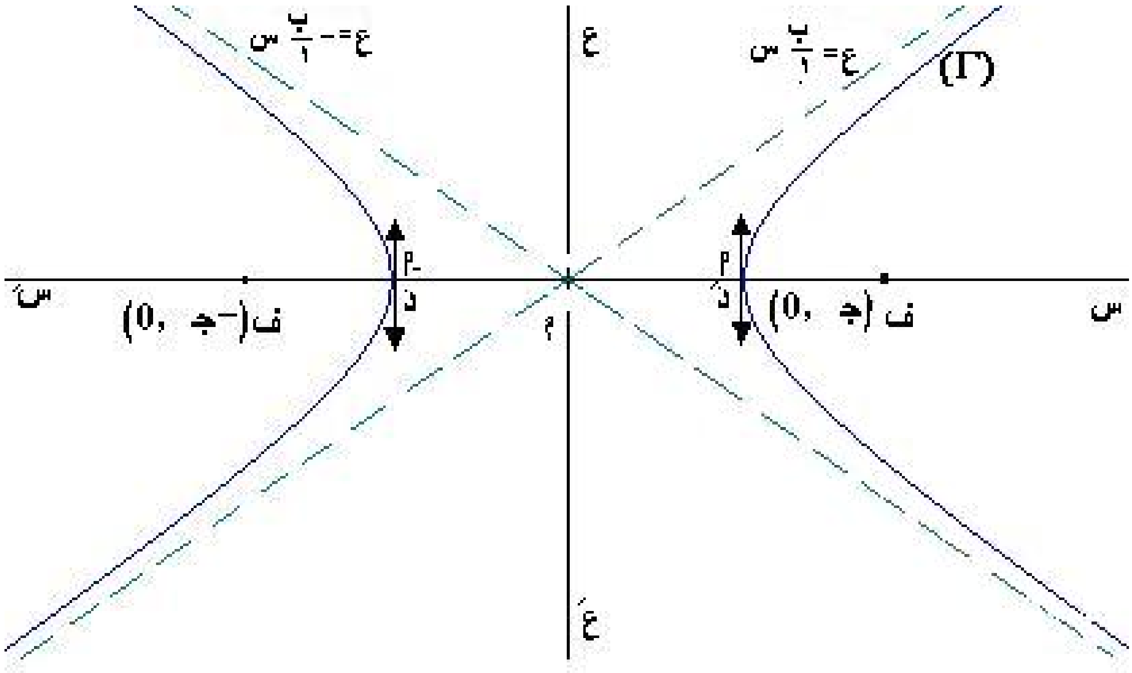
1 – محور تناظري : $[ذ ذَ]$ المحمول على سَ م س هو المحور البؤري أو المحور القاطع طوله 2أ.

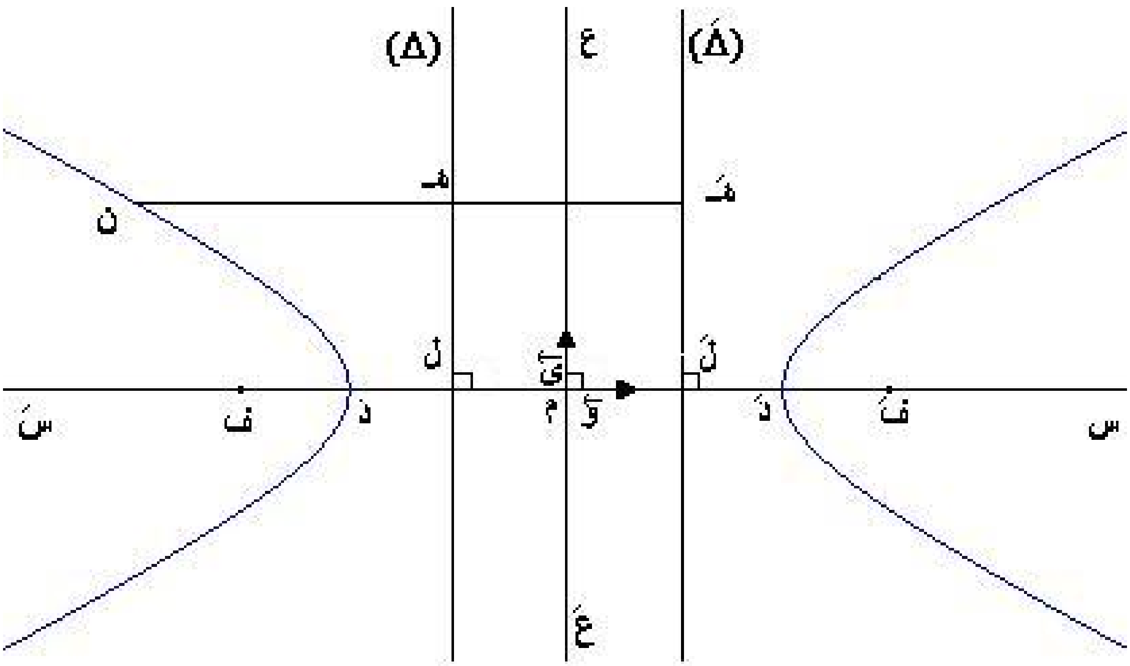
$[ط طَ]$ المحمول على عَ م ع هو المحور غير القاطع طوله 2 ب والنقطة م هي مركز القطع الزائد.

2 – البؤرتان هما ف(جـ ، 0) وَ فَ(-جـ ، 0) حيث $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ وَ له دليلين (Δ) ، $(\acute{\Delta})$ معادلتيهما $س = \frac{-أ}{ك}$ ، $س = \frac{أ}{ك}$ حيث $ك = \frac{جـ}{أ}$ ويُدعى ك التباعد المركزي.

3 – للقطع الزائد ذروتان ذ(−أ ، 0) ، ذَ(−أ ، 0) والدائرة التي قطرها [ذ ذَ] وطوله 2أ تسمى الدائرة الرئيسية.

4 – للقطع الزائد(Γ) خطان مقاربان معادلتيهما : ع = $\frac{ب}{أ}$ س وَ ع = − $\frac{ب}{أ}$ س





8 – 2 – 3 الخاصية الأساسية للقطع الزائد :

بنفس الطريقة و حسب الفقرة (8. 1. 3) إذا كان(Γ) قطعا زائدا بؤرتاه ف ، فَ ودليلاه (Δ) وَ(Δ) فإنه :

$\forall$ ن $\in (\Gamma)$ يكون $|$ ن ف – ن فَ $|$ = 2 ﺃ حيث :

ن ف = ك . ن هـ ، ك > 1 و ن فَ = ك . ن هـَ نجد :

$|$ن ف – ن فَ$|$ = $|$ك$|$.$|$ن هـ – ن هـَ$|$ = ك . هـ هـَ.

إذن هـ هـَ = ل لَ = $\frac{2\,ﺃ}{ك}$ ومنه $|$ن ف – ن فَ$|$ = 2 ﺃ والعكس صحيح.

8 – 3 إنشاء القطع المكافئ :

ليكن القطع المكافئ ذو المعادلة : $ع^2 = 2\lambda$ س مع $\lambda \in ح^*$:

$$ع^2 = 2\lambda س \begin{cases} ع = \sqrt{2\lambda س} \quad أو \quad ع = -\sqrt{2\lambda س} \\ وَ\ س \geq 0 \quad إذا\ كان\ \lambda \rangle 0 \\ أو\ س \leq 0 \quad إذا\ كان\ \lambda \langle 0 \end{cases}$$

ولنعتبر الدالتان $تا_1$ وَ $تا_2$ حيث :

$$تا_1(س) = \sqrt{2\lambda س} ،\ تا_2(س) = -\sqrt{2\lambda س}$$

نلاحظ أن $تا_2(س) = -تا_1(س)$ وهذا من أجل كل س من مجموعة تعريفهما ومنه منحنياهما متناظران بالنسبة لمحور الفواصل. ولهذا يكفي دراسة الدالة $تا_1$.

$فا_{تا_1}$ =]0 ، +∞ [إذا كان $\lambda \rangle 0$وَ $\underset{س \to +\infty}{نها} تا_1(س) = +\infty$.

أو $فا_{تا_1}$ =]–∞ ، 0] إذا كان $\lambda \langle 0$ $\underset{س \to -\infty}{نها} تا_1(س) = +\infty$.

* إذا كانت $\lambda \rangle 0$ فإن الدالة $تا_1$ قابلة للآشتقاق على المجال]0 ، +∞ [حيث $تاَ_1(س) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda س}}$ إذن $تاَ_1(س) \rangle 0$ ومنه $تا_1$ دالة متزايدة على المجال]0 ، +∞ [.

لدينا $تا_1(0) = 0$ وَ $\underset{\substack{\rangle \\ س \to 0}}{نها} \frac{تا_1(س) - تا_1(0)}{س} = +\infty$

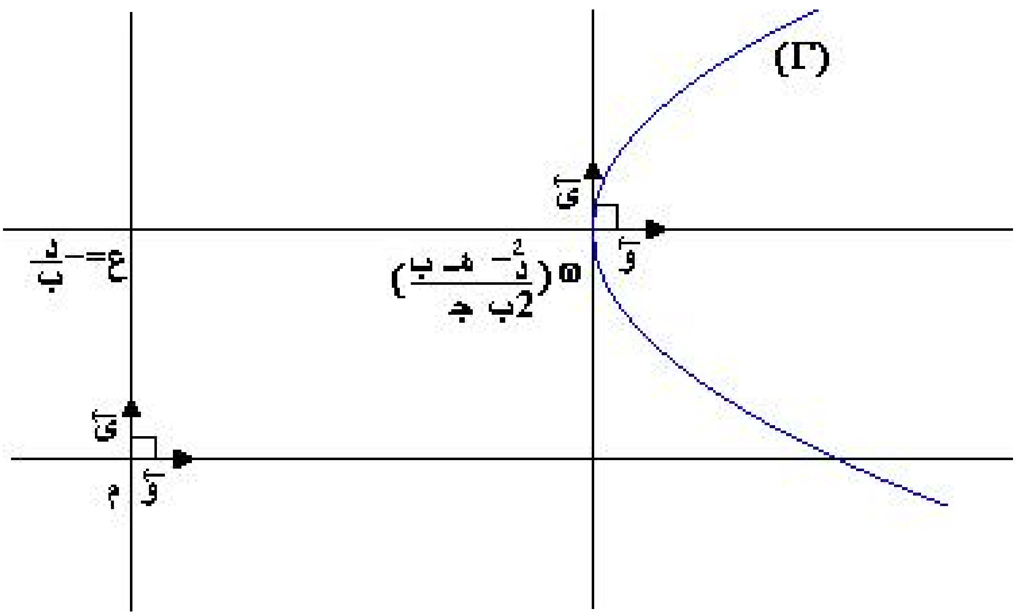
إذن $تا_1$ غير قابلة للاشتقاق على يمين $س_0 = 0$ ومنحني الدالة $تا_1$ يقبل مماسا معادلته س = 0 يوازي محور التراتيب.

س	0	$+\infty$
$تا_1'(س)$	$+\infty$	+
$تا_1$	0	$\nearrow +\infty$

* دراسة الفروع اللانهائية : لدينا $\lim_{س \to +\infty} تا_1(س) = +\infty$

و $\lim_{س \to +\infty} \frac{تا_1(س)}{س} = \lim_{س \to +\infty} \frac{\sqrt{2\lambda س}}{س} = \lim_{س \to +\infty} \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda س}} = 0$

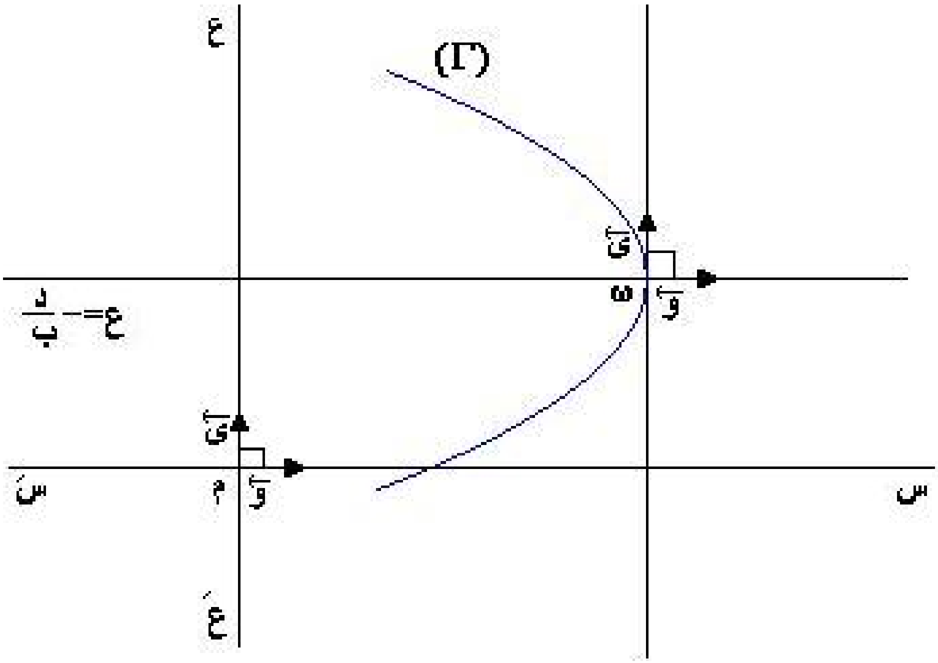
ومنه منحني الدالة $تا_1$ هو فرع مكافئ منحاه محور الفواصل في جوار $+\infty$.



* **ملاحظة :**

إذا كان $\lambda \langle 0$ بنفس الطريقة نجد

و المنحني (Γ) هو كالآتي :

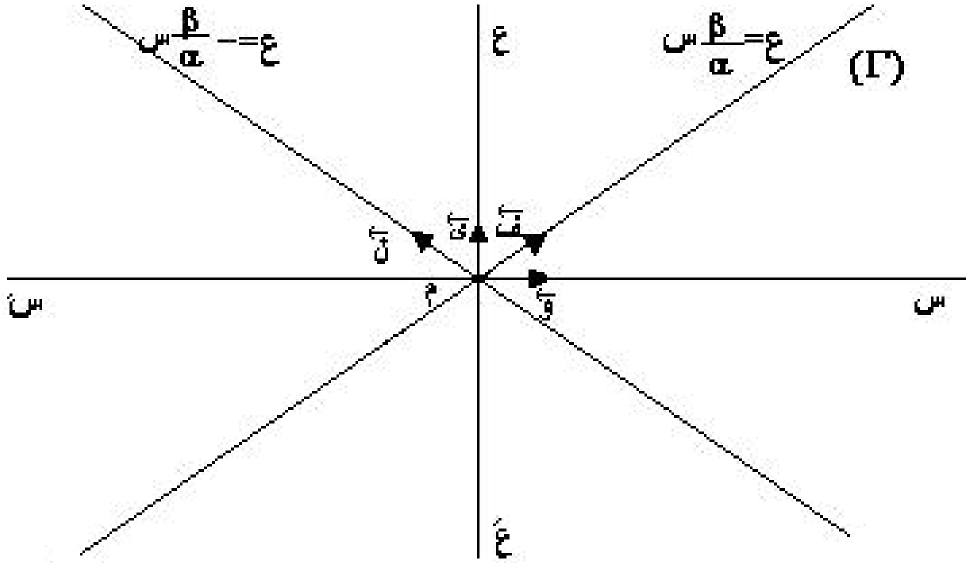


* **نتيجة :**

في كلتي الحالتين المنحني(Γ) هو قطع مكافئ ذروته ω ومعادلة محور تناظره هي :
$ع = -\frac{د}{ب}$

9 – معادلة القطع الزائد المنسوب إلى مستقيميه المقاربين :

ليكن (Γ) قطعا زائدا معادلته $\frac{س^2}{\alpha^2} - \frac{ع^2}{\beta^2} = 1$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(م، \vec{و}، \vec{ى})$ولتكن معادلة المنحني (Γ) في المعلم $(م، \vec{و}، \vec{ل})$حيث $\vec{ق}$ و $\vec{ل}$ شعاعي التوجيه للمستقيمين المقاربين لهذا المنحني.



نعلم أن المنحني(Γ) في المعلم$(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ يقبل مستقيمين معادلتيهما

$ع = \frac{\beta}{\alpha}س$ و $ع = -\frac{\beta}{\alpha}س$

أو $\beta س - \alpha س = 0$ وَ $\beta س + \alpha س = 0$.

بوضع (Δ_1) : $\beta س - \alpha ع = 0$

(Δ_2) : $\beta س + \alpha ع = 0$

نجد شعاع توجيه(Δ_1) هو $\vec{ق}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ و شعاع توجيه(Δ_2) هو $\vec{ل}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

لتكن ن نقطة من المستوي حيث إحداثييها (س ،ع) بالنسبة للمعلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ وَ **(س ،ع)** بالنسبة للمعلم$(م ، \vec{ق} ، \vec{ل})$ ومنه يكون :

$\overrightarrow{م ن} = س\vec{و} + ع\vec{ي}$

$\overrightarrow{م ن} = س\vec{ق} + ع\vec{ل}$

نجد $س\vec{و} + ع\vec{ي} = س\vec{ق} + ع\vec{ل}$ . . . . . (1)

بما أن $\vec{ق}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ أي $\vec{ق} = \alpha\vec{و} + \beta\vec{ي}$

$\vec{ل}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ أي $\vec{ل} = -\alpha\vec{و} + \beta\vec{ي}$ نستنتج ما يلي :

$(1) \Leftrightarrow س\vec{و} + ع\vec{ي} = س\vec{ق} + ع\vec{ل}$

$(1) \Leftrightarrow س\vec{و} + ع\vec{ي} = س(\alpha\vec{و} + \beta\vec{ي}) + ع(-\alpha\vec{و} + \beta\vec{ي})$

$(1) \Leftrightarrow س\vec{و} + ع\vec{ي} = \alpha س\vec{و} + \beta س\vec{ي} - ع\alpha\vec{ق} + ع\beta\vec{ي}$

$$(1) \Leftrightarrow \text{س}\,\vec{و} + \text{ع}\,\vec{ي} = \left(\alpha\,\text{س} - \alpha\,\text{ع}\right)\vec{و} + \left(\beta\,\text{س} + \beta\,\text{ع}\right)\vec{ي}$$

$$(1) \Leftrightarrow \text{س}\,\vec{و} + \text{ع}\,\vec{ي} = \alpha\left(\text{س} - \text{ع}\right)\vec{و} + \beta\left(\text{س} + \text{ع}\right)\vec{ي}$$

إذن
$$\begin{cases} \text{س} = \alpha\left(\text{س} - \text{ع}\right) \\ \text{ع} = \beta\left(\text{س} + \text{ع}\right) \end{cases}$$

وبالتالي يكون : $\frac{\text{س}^2}{\alpha^2} - \frac{\text{ع}^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2\left(\text{س} - \text{ع}\right)^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2\left(\text{س} - \text{ع}\right)^2}{\beta^2}$

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} - \text{ع}\right)^2 - \left(\text{س} + \text{ع}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -4\,\text{س}\,\text{ع} = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{س}\,\text{ع} = -\frac{1}{4}.$$

بصورة عامة نتحصل عن معادلة من الشكل س ع = ك حيث ك∋ ح * .

نظرية :

إذا كان(Γ) قطعا زائدا حيث $\vec{ق}$ و $\vec{ل}$ شعاعا التوجيه لمستقيميه المقاربين و م نقطة تقاطعهما فإن المنحني (Γ) يقبل معادلة من الشكل س ع = ك مع ك∋ ح * في المعلم $\left(م ، \vec{ق}، \vec{ل}\right)$.

* **نتيجة :**

إن مجموعة النقط ن (س ، ع) في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(م ، \vec{ق}، \vec{ل}\right)$ و التي تحقق العلاقة من الشكل س ع = ك حيث ك∋ ح * هي قطع زائد مركزه م ومستقيماه المقاربان هما محورا الإحداثيات.

10 - تمارين التصحيح الذاتي :

10 - 1 في المتوي المنوب لمعم متعامد و متجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$.

إنشئ المنحني (Γ) الذي معادلته :

$\text{ع}^2 - (\text{ط} + 2)\,\text{س} + 4\,\text{ع} + \text{ط} + 1 = 0$ / ط وسيط حقيقي.

10 - 2 في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$.

أرسم المنحني (Γ) الذي معادلته : $-\text{س}^2 + 2\,\text{ع}^2 + 2\,\text{س} + 8\,\text{ع} + 5 = 0$ ثم حدد طبيعته.

10 - 3 - أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي ط طبيعة المنحني (Γ) الذي معادلته :
$4س^2 + ع^2 + 16س - 2ع + 25 - 4ط = 0$. ثم أرسم (Γ) في معلم متعامد و متجانس $(م ، \overrightarrow{و} ، \overrightarrow{ي})$.

11 - أجوبة التصحيح الذاتي :

11 - 1 - لدينا $ع^2 - ط + 2س + 4ع + ط + 1 = 0$ ....(1)

$$(1) \Leftrightarrow ع^2 + 4ع + 4 - 4 - (ط+2)س + ط + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (ع+2)^2 - (ط+2)س + ط - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (ع+2)^2 = (ط+2)س + 3 - ط$$

***المناقشة :**

أولاً : إذا كان $ط + 2 = 0$ أي $ط = -2$ نجد

$$(1) \Leftrightarrow (ع+2)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow ع + 2 = \sqrt{5} \quad أو \quad ع + 2 = -\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow ع = -2 + \sqrt{5} \quad أو \quad ع = -2 - \sqrt{5}$$ وَ س عدد كيفي.

نستنتج أن المنحنى (Γ) هو إتحاد المستقيمين اللذين معادلتيهما $ع = -2 + \sqrt{5}$ وَ $ع = -2 - \sqrt{5}$ وَ هما موازيان لمحور الفواصل.

ثانياً : إذا كان $ط \neq 2$ أي $ط + 2 \neq 0$ نجد :

$$(1) \Leftrightarrow (ع+2)^2 = (ط+2)\left[س + \frac{3-ط}{ط+2}\right] = 0 \quad (لأن\ ط + 2 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow (ع+2)^2 = (ط+2)\left[س - \frac{ط-3}{ط+2}\right]$$

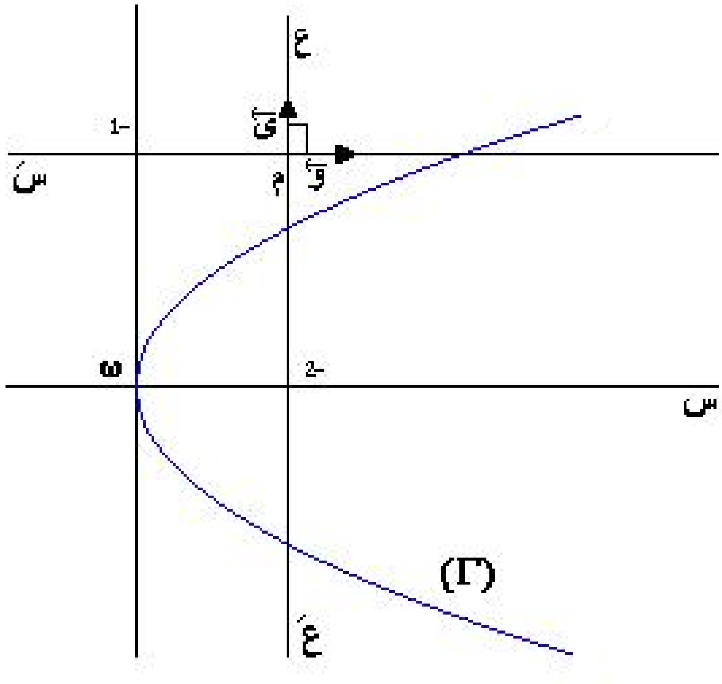
بوضع $\bar{ع} = ع + 2$ وَ $\bar{س} = س - \frac{ط-3}{ط+2}$ مع $ط \neq -2$ يكون

$(1) \Leftrightarrow \bar{ع}^2 = (ط+2)\bar{س}$ وهي معادلة من الشكل $ع^2 = 2\lambda س$

نستنتج أن المنحنى (Γ) هو قطع مكافئ ذروته $\omega\left(\frac{ط-3}{ط+2} ، -2\right)$ ومحور تناظره هو محور الفواصل للمعلم $(\omega ، \overrightarrow{و} ، \overrightarrow{ي})$.

فمثلاً من أجل $ط = \frac{1}{2}$ تكون المعادلة كالآتي : $ع^2 = \frac{5}{2} س$

وَ ω (−1 ، −2) وشكل المنحني (Γ) من أجل القيمة $\frac{1}{2}$ للوسيط ط هو كما يلي :



11 - 2 - لدينا – س² + 2ع² + 2س + 8ع + 5 = 0 ......(1)

(1) ⇔ −(س − 1)² + 2(ع + 2)² − 2 = 0

(1) ⇔ −(س − 1)² + 2(ع + 2)² = 2

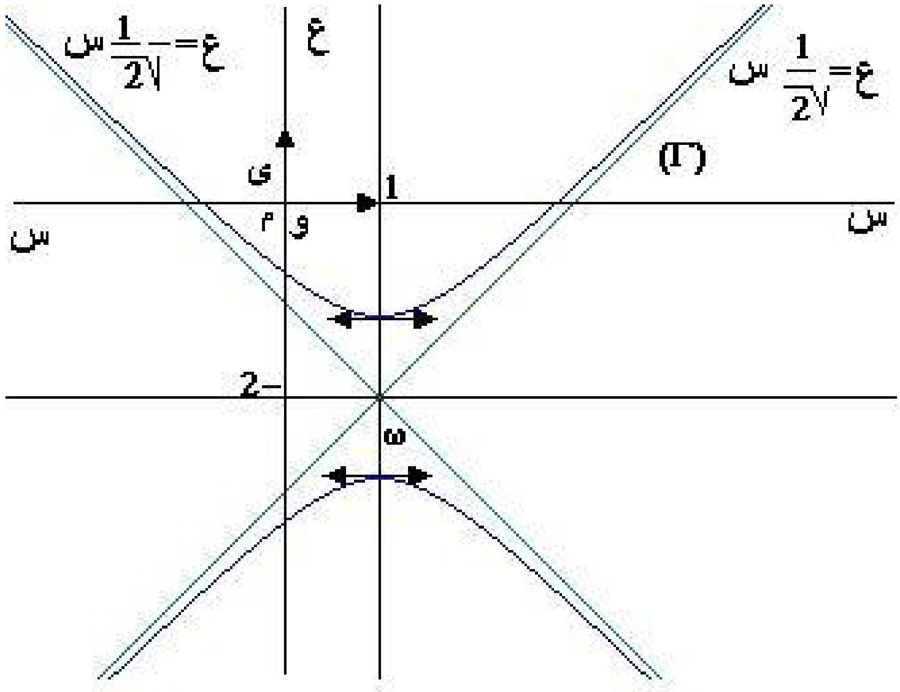
⇔ −س² + 2ع² = 2 بوضع **س** = س − 1 وَ ع = ع + 2

وبالتالي يكون – س² + 2ع² = 2 ⇔ $-\frac{\text{س}^2}{2}$ + ع² = 1

(بقسمة طرفي المعادلة على 2)

وهي معادلة قطع زائد في المعلم (ω ، و ، ي) حيث مركزه ω (1 ، −2) وَ ذروتاه ن$_2$(0 ، 1) وَ نَ$_2$(0 ، −1) ومعادلتا مستقيميه المقاربين هما ع = $\frac{1}{\sqrt{2}}$س ،

ع = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$س .



11 − 3 − لدينا $4س^2 + ع^2 - 2ع + 16س + 25 - 4ط = 0$ ......(1)

(1) $\Leftrightarrow 4(س+2)^2 - 16 + (ع-1)^2 - 1 + 25 - 4ط = 0$

$\Leftrightarrow 4(س+2)^2 + (ع-1)^2 - 4ط + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 4(س+2)^2 + (ع-1)^2 = 4ط - 8$

$$\Leftrightarrow (س+2)^2 + \frac{(ع-1)^2}{4} = ط - 2$$

بوضع **س** = س + 2 و **ع** = ع − 1 نجد :

(1) $\Leftrightarrow \frac{س^2}{1^2} + \frac{ع^2}{2^2} = ط - 2$ ....(2) ومنه نلاحظ ما يلي :

* إذا كان ط − 2< 0 أي ط< 2 يكون طرفا المعادلة (2) مختلفان في الإشارة وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي مجموعة خالية.

* إذا كان ط − 2 = 0 أي ط= 2 يكون الطرف الأول للمعادلة (2) معدوما من أجل **س** = 0 وَ **ع** = 0 أي س + 2 = 0 وَ ع − 1 = 0 ومنه س = − 2 وَ = 1 إذن مجموعة النقط (Γ) هي نقطة واحدة ω (1 ، −2).

* إذا كان ط − 2> 0 أي ط> 2 تصبح المعادلة (2) كالآتي :

(1) $\Leftrightarrow \frac{س^2}{ط - 2} + \frac{ع^2}{4(ط - 2)} = 1$ (لأن ط − 2 ≠ 0).

بوضع $\alpha=\sqrt{ط-2}$ و $\beta=2\sqrt{ط-2}$ تكون المعادلة (2) من الشكل : $\frac{س^2}{\alpha^2}+\frac{ع^2}{\beta^2}=1$ نستنتج أن

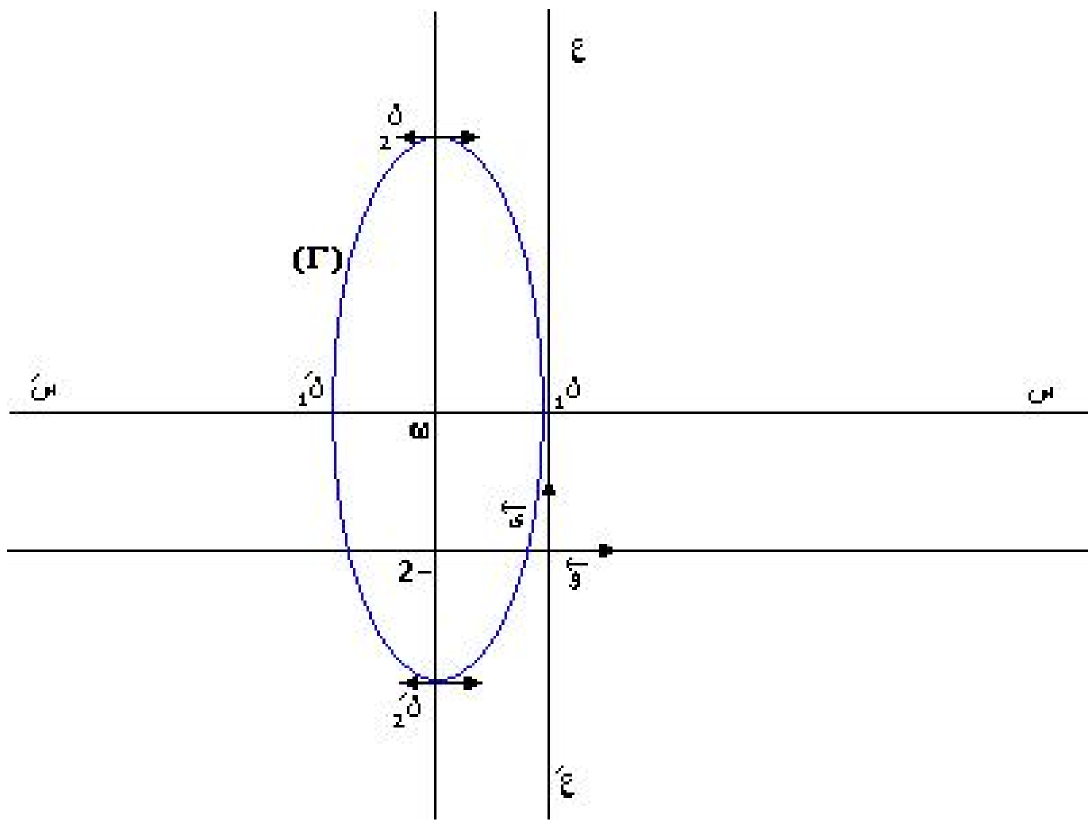
المنحنى (Γ) هو قطع ناقص مركزه ω $(-2 ، 1)$ حيث $\beta \rangle \alpha$ إذن ذراه الأربعة هي : $ن_1(\alpha ، 0)$

و $ن'_1(-\alpha ، 0)$ ، $ن_2(0 ، \beta)$ ، $ن'_2(0 ، -\beta)$.

يكون $ن_1ن'_1$ محوره الصغير و $ن_2ن'_2$ محوره الكبير فمثلا من أجل ط = 6 يمكننا رسم

القطع الناقص (Γ) نجد $\alpha = 2$ و $\beta = 4$

والنقط $ن_1(2 ، 0)$، $ن'_1(-2 ، 0)$، $ن_2(0 ، 4)$، $ن'_2(0 ، -4)$ في المعلم $(\omega ، \vec{و} ، \vec{ي})$.



الـتـآلـف

خـاص بـشـعـبـة عـلـوم الـدقـيـقـة فـقـط

الـهـدف من الـدرس : تـتـمـة دراسـة الـتـحـويـلات الـنـقـطـيـة.

الـمـدة الـلازمـة لـدارسـتـه : 06 سـاعـات.

الـدروس الـتـي يـنـبـغـي الـرجـوع إلـيـهـا :

*الإرتـبـاط الـخـطـي

* مـقـدّمـة فـي الـتـحـويـلات الـنـقـطـيـة

الـمـراجـع : كـتـاب الـريـاضـيـات 3 ث / ع + ر.

الـمـعـهـد الـتـربـوي الـوطـنـي.

تـصـمـيـم الـدرس

1 - تـعـريـف الـتـآلـف..

2 - خـواص الـتـآلـف.

3 - تـركـيـب تـآلـفـيـن .

4 - الـعـبـارة الـتـحـلـيـلـيـة لـلـتـآلـف.

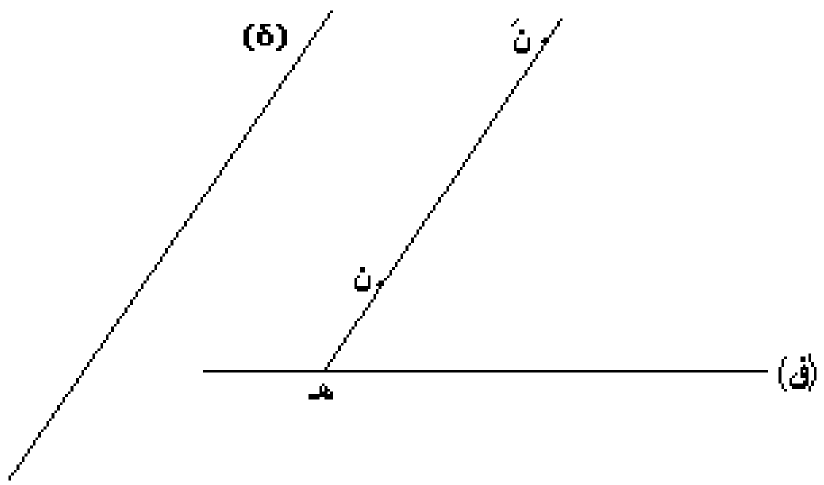
5 - تـطـبـيـقـات الـتـآلـف.

6 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.

ليكن (ق) مستقيم مفروض في المستوي (π) ، (δ) منحى مستقيم ثابت لا يوازي (ق) . وليكن ك عدد حقيقي غير معدوم .

1 تعريف التآلف:

نسمي تآلف محوره (ق) ومنحاه (δ) ونسبة ك التحويل النقطي ف : $\pi \longrightarrow \pi$
ن ⟵ نَ بحيث : $\overrightarrow{\text{هـ نَ}} = \text{ك} \cdot \overrightarrow{\text{هـ ن}}$.
(هـ مسقط نَ على (ق) توازيا مع (δ))



نرمز للتآلف الذي محوره (ق) ومنحاه(δ) ونسبته ك بالرمز : ف (ق، δ ، ك)
ويتعين التآلف بمعرفة محوره ومعرفة نقطة ومحولتها.

ملاحظات :

- إذا كان ك = 1 فإن : ف (ق ، δ ، 1) = 1_π .
- إذا كان ك = − 1 فإن : ف = (ق ، δ ، −1) هو تناظر.
- إذا كان ق $\perp$ δ فإن : ف =(ق ، δ ، ك) هو تناظر عمودي أو تآلف عمودي.

2 - خواص التآلف :

1 / التآلف ف (ق ، δ ، ك) هو تحويل تقابلي لأن :

* $\forall$ (ن$_1$ ، ن$_2$) $\in (\pi)^2$: نَ$_1$ = نَ$_2$ $\Leftarrow$ ن$_1$ = ن$_2$. (ف متباين)

* $\forall$ نَ $\in (\pi)$ E ن $\in (\pi)$: $\overleftarrow{\text{هـ نَ}_1}$ = ك . $\overleftarrow{\text{هـ ن}}$

أي : $\overleftarrow{\text{هـ ن}_1} = \frac{1}{\text{ك}}$. $\overleftarrow{\text{هـ نَ}}$ (ف غامر).

إذن للتحويل ف تحويل عكسي هو تآلف له نفس المحور ونفس المنحنى ونسبته $\frac{1}{\text{ك}}$

ونَكتب : ف $^{-1}\left(\text{ق} ، \delta ، \frac{1}{\text{ك}}\right)$.

نتيجة :

يكون التآلف تضامنيا إذا : ك= $\frac{1}{\text{ك}}$

أي : ك =1 أو ك = −1.

2 / النقاط الصّامدة :

عندما ك ≠ 1 . ن صامدة $\Leftrightarrow$ $\overleftarrow{\text{هـ ن}}$=ك . $\overleftarrow{\text{هـ ن}}$

$\Leftrightarrow$ $\overleftarrow{\text{هـ ن}} = \overleftarrow{0}$

أي أن ن = هـ وهذا يعني ن $\in$ (ق).

إذن مجموعة النقاط الصامدة هي نقاط المستقيم (ق) .

3 / محوّل مستقيم بواسطة تآلف هو مستقيم ليكن (ل) مستقيم مفروض.

– إذا كان : (ل) // (ق) فإن (لَ) // (ق) أي (ل) // (لَ) .

– أما إذا كان : (ل) لا يوازي (ق) فإن : (ل) $\cap$ (لَ) ={د}.

حيث : د$\in$ (ق) .

أي أن كل مستقيم يقطع محوّله في نقطة تنتمي إلى محور التآلف. المستقيمات الموازية لِ (δ) صامدة إجمالاً.

يحوّل التآلف المستقيمات المتوازية إلى مستقيمات متوازية ولكنه يُغيّر الأطوال (ليس تساوي قياس)

3 - تركيب تآلفين :

نكتفي بدارسة تركيب تآلفين لهما نفس المحور ونفس المنحنى ليكن $ف_1(ق ، \delta، ك_1)$ ، $ف_2(ق ، \delta، ك_2)$ تآلفين مفروضين.

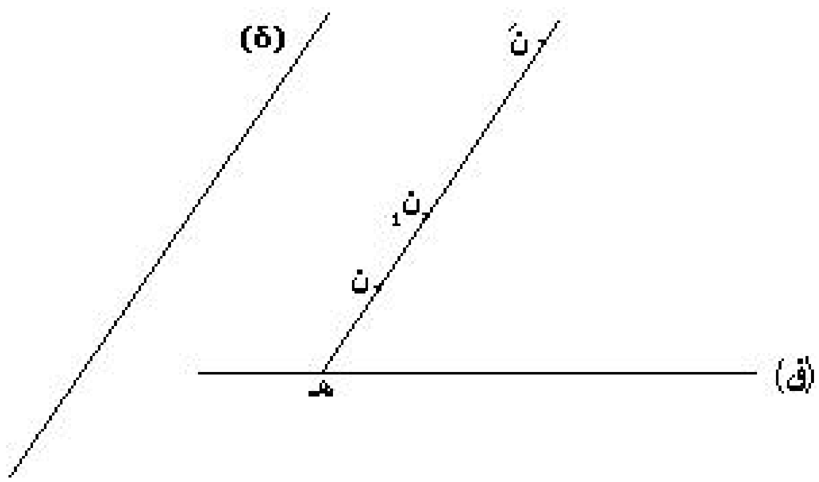
ولنعتبر :

$$\begin{tikzcd} \text{ن} \arrow[r, mapsto, "\text{ف}_1"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "\text{ف}_2 \circ \text{ف}_1"'] & \text{ن}_1 \arrow[r, mapsto, "\text{ف}_2"] & \text{نَ} \end{tikzcd}$$

لدينا :

$$\begin{cases} \overleftarrow{\text{هـ ن}_1} = \text{ك}_1 \,.\, \overleftarrow{\text{هـ ن}} \\ \overleftarrow{\text{هـ نَ}} = \text{ك}_2 \,.\, \overleftarrow{\text{هـ ن}_1} \end{cases}$$

حيث هـ مسقط ن على (ق) توازيًا مع (δ) .(حسب الشكل)



ينتج : $\overleftarrow{\text{هـ نَ}} = \text{ك}_1\text{ك}_2 \,.\, \overleftarrow{\text{هـ ن}}$

أي أن : $ف_1 \circ ف_2$ هو تآلف محوره (ق) ومنحاه (δ) ونسبته $ك_1 . ك_2$ ومن المواضع أن العملية$\circ$ تبديلية.

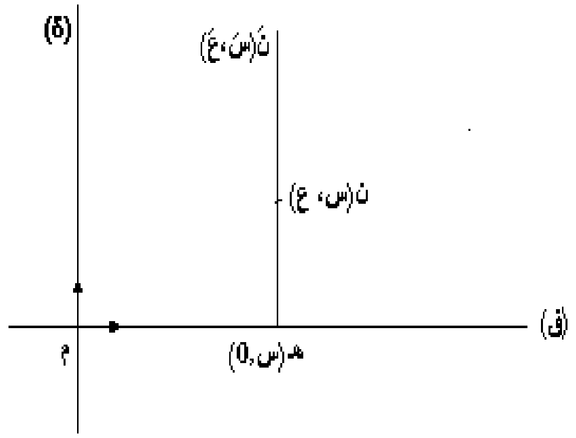
نتيجة :

مجموعة التآلفات التي لها نفس المحور ونفس المنحى لها بُنية زمرة تبديلية بواسطة العملية$\circ$.

4 – العبارة التحليلية للتآلف :

ليكن التآلف : ف (ق ، δ ، ك)

ولننسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(\text{م} ، \overrightarrow{\text{و}} ، \overrightarrow{\text{ي}})$ حيث (ق) هو محور الفواصل وَ (δ) محور التراتيب.



عندئذ لدينا : $\overrightarrow{\text{هـ نَ}} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{هـ ن}}$.

أي

$$\overrightarrow{\text{م نَ}} - \overrightarrow{\text{م هـ}} = \text{ك}\left(\overrightarrow{\text{م ن}} - \overrightarrow{\text{م هـ}}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{م نَ}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{م ن}} + (1-\text{ك})\ \overrightarrow{\text{م هـ}}$$

وبالإسقاط نجد : $\begin{cases} \text{سَ} = \text{س} \\ \text{عَ} = \text{ك ع} \end{cases}$

ملاحظة :

لا تتغير العبارة التحليلية للتآلف في حالة كون المعلم غير متجانس

الحالة العامة : إن العبارة التحليلية للتآلف في الحالة العامة جدّ معقدة لذا نكتفي بذكر (دون برهان) وهي من الشكل.
$\begin{cases} \text{سَ} = \text{أ س} + \text{ب ع} + \text{جـ} \\ \text{عَ} = \text{أَ س} + \text{بَ ع} + \text{جَ} \end{cases}$

حيث أ ،أَ ، ب ، بَ ، جـ ، جَ أعداد حقيقية.

وهذا ما دعوناه التحويل التآلفي في بحث " مقدمة في التحويلات النقطية"

5 – تطبيقات :

* **أولا** : ليكن التآلف في (م س ، م ع ، ك)

رأينا أن : ف : ن $\leftarrow$ نَ / $\begin{cases} \text{سَ} = \text{س} \\ \text{عَ} = \text{ك ع} \end{cases}$

ولنبحث عن محوّل مستقيم ما وفق هذا التآلف.

ولنفرض المستقيم (ل) ولنميز عدة حالات :

(1) / (ل) // (م ع) عندئذ معادلة (ل) من الشكل :

س= ٲ حيث ٲ ∋ ح .

محوّله هو المستقيم (لَ) ذي المعادلة : سَ = ٲ .

أي أن المستقيم (لَ) صامد إجمالا.

(2) / (ل) // (م س) عندئذ معادلة المستقيم (ل) من الشكل : ع = ب / ب ∋ ح .

محوّلة هو المستقيم (ل) ذي المعادلة : $\frac{عَ}{ك}$ = ب أي : عَ = ك . ب والمستقيمان (ل) ،

(لَ) متوازيان يوازيان م س.

(3) / (ل) مستقيم كيفي معادلته : عَ = ٲس + ب / ٲ $\neq$ 0.

محوّله هو المستقيم (لَ) ذي المعادلة : عَ = عَ=ك ٲ سَ +ك ب

و لكن : (لَ) ∩ (م س) = $\left\{\left(-\frac{ب}{ٲ}، 0\right)\right\}$

وَ (ل) ∩ (م س) = $\left\{\left(-\frac{ب}{ٲ}، 0\right)\right\}$

إذن : (ل) وَ (لَ) يتقاطعان في النقطة $\left(-\frac{ب}{ٲ}، 0\right)$ وهي تنتمي إلى محور التآلف.

* ثانيا : نستخدم في هذه الحالة التمثيل الوسيطي لمنحني بياني بدل التمثيل الديكارتي.

ليكن المنحني (ي) الممثل بالمعادلتين : $\begin{cases} س = تا(\alpha) \\ ع = ها(\alpha) \end{cases}$

حيث α وسيط حقيقي.

إن محوّله وفق التآلف هو المنحني (يَ) الممثل بالمعادلتين : $\begin{cases} س = تا(\alpha) \\ ع = ك\ ها.(\alpha) \end{cases}$

وبفرض (Δ) المماس للمنحني (ي) في نقطة اختيارية منه

و (Δ') المماس للمنحني (يَ) في نقطة اختيارية منه.

أي : $(\Delta): \begin{cases} تَا(\alpha) \\ هَا(\alpha) \end{cases}$ و $(\Delta'): \begin{cases} تاَ(\alpha) \\ ك\ هاَ(\alpha) \end{cases}$

نعلم أن معادلة المستقيم (Δ) هي : ع − ها(α) = $\frac{هاَ(\alpha)}{تاَ(\alpha)}$. (س − تا(α)) .

بـحـيـث : تـاَ$(\alpha) \neq 0$.

ومعادلـة المستقيم (Δ') هـي :. ع − هـا (α) = $\frac{\text{ك هـاَ}(\alpha)}{\text{تاَ}(\alpha)}$ [س − تـا(α)]

أي : $\frac{\text{ع}}{\text{ك}}$ − ها(Δ) = $\frac{\text{هـاَ}(\alpha)}{\text{تاَ}(\alpha)}$. (س − تـا(α)))

وهـذا يـعـنـي أن : (Δ') هـو مـحـوّل (Δ) وفـق الـتآلـف ف

نـتـيـجـة : الـمـمـســان فـي نـقـطـتـيـن مـتـآلـفـيـن لـمـنـحـنـيـين مـتـآلـفـين يـكـونـان مـتـآلـفـيـن وفـق نـفـس الـتـآلـف .

حـالـة خـاصـة : إذا كـان تـاَ (α) = 0 عـنـدئـذ :

(Δ): $\begin{cases} 0 \\ \text{هاَ}(\alpha) \end{cases}$ ، (Δ'): $\begin{cases} 0 \\ \text{ك . هاَ}(\alpha) \end{cases}$

أي أن مـعـادلـة الـمـسـتـقـيـم (Δ) هـي س = د.

ومـعـادلـة الـمـسـتـقـيم (Δ') هـي سَ = د .

وهـذا يـعـنـي أن الـمـسـتـقـيم (Δ') هـو مـحـوّل الـمـسـتـقـيم (Δ) وفـق نـفـس الـتـآلـف أيـضـا.

* **ثـالـثـا** : تـطـبـيـق الـتـآلـف لـدراسـة الـقـطـع الـنـاقـص :

لـتـكـن الـدائـرة (د) ذات الـمـعـادلـة : س^2+ع^2−ر^2=0

ولـنـعـتـبـر الـتـآلـف : ف (م س ، م ع ، ك) الـذي عـبـارتـه الـتـحـلـيـلـيـة كـمـا رأيـنـا هـا هــي :

$\begin{cases} \text{سَ} = \text{س} \\ \text{عَ} = \text{ك ع} \end{cases}$

إن مـعـادلــة (دَ) مـحـوّلــة الـدائــرة (د) وفــق الــتـآلـف ف هــي س^2+$\left(\frac{\text{ع}}{\text{ك}}\right)^2$ − ر^2=0 أي :

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{ع}^2}{(\text{ر ك})^2} - 1 = 0$$

فـإذا كـان : |ك| < 1 فـإن (دَ) قـطـع نـاقـص مـحـوره م س .

وإذا كـان : |ك| >1 فـإن (دَ) قـطـع نـاقـص مـحـوره م ع .

إذن : مـحـوّلـة دائـرة وفـق تـآلـف هـي قـطـع نـاقـص.

الـعـكـس : لـيـكـن الـقـطـع الـنـاقـص ذي الـمـعـادلـة : $\frac{\text{س}^2}{\text{ب}} + \frac{\text{ع}^2}{\text{جـ}^2} - 1 = 0$

عـنـدئـذ يـوجد تـآلف ف $\left(\text{م س ، م ع ، } \mp\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}\right)$ يحـوّل هـذا القطـع إلـى دائـرة وعـبارتـه التحليلية هي
$$\begin{cases} \text{سَ} = \text{س} \\ \text{عَ} = \mp\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}\,\text{ع} \end{cases}$$

وبالتعويض نجد :
$$\frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ع}^2}{\left(\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}\right)^2 . \text{جـ}^2} - 1 = 0$$

أي : $\text{س}^2+\text{ع}^2=\text{ب}^2$. وهي معادلة الدائرة المطلوبة.

6 – تمارين التصحيح الذاتي :

6 – 1 ليكن المستقيمان (ق) ، (Δ) المعرفان بمعادلتيهما حيث : (ق) : س + 2ع = 0 ، (Δ) : 2س – 4 ع + 1 = 0

عين العبارة التحليلية للتآلف ف الذي محوره (ق) ومنحاه (Δ) ونسبته 2.

6 – 2 – في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(\text{م ، }\vec{\text{و}}\text{ ، }\vec{\text{ي}})$ نعتبر التحويل النقطي ت حيث : ت : ن (س ، ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ) /
$$\begin{cases} \text{سَ} = \text{س} \\ \text{عَ} = \text{س} + 2\,\text{ع} \end{cases}$$

* أوجد (Δ) مجموعة النقاط الصامدة وفق التحويل ت.
* بفرض ن $\notin (\Delta)$ و نَ = ت(ن) ماذا يمكن أن نقول عن الشعاع $\overrightarrow{\text{ن نَ}}$.
* بفرض هـ نقطة تقاطع (ن نَ) مع (Δ) عبّر عن $\overrightarrow{\text{هـ نَ}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{هـ ن}}$.

7 – الأجوبة :

7 – 1 – حسب تعريف التآلف ف : ن $\longmapsto$ نَ بحيث : $\overrightarrow{\text{هـ نَ}} = 2\,\overrightarrow{\text{هـ ن}}$ حيث هـ مسقط ن على (ق) توازيا مع (Δ) .

$$\overrightarrow{\text{هـ م}}+\overrightarrow{\text{م نَ}} = 2\left(\overrightarrow{\text{هـ م}}+\overrightarrow{\text{م ن}}\right)$$

ومنه : $\overrightarrow{\text{م نَ}} = 2\,\overrightarrow{\text{م ن}} - \overrightarrow{\text{م هـ}}$

وبإسقاط هذه العلاقة نجد : $\left\{ \begin{array}{l} \text{س}' = 2\text{س} - \text{س}_{\text{هـ}} \\ \text{ع}' = 2\text{ع} - \text{ع}_{\text{هـ}} \end{array} \right.$ (*)

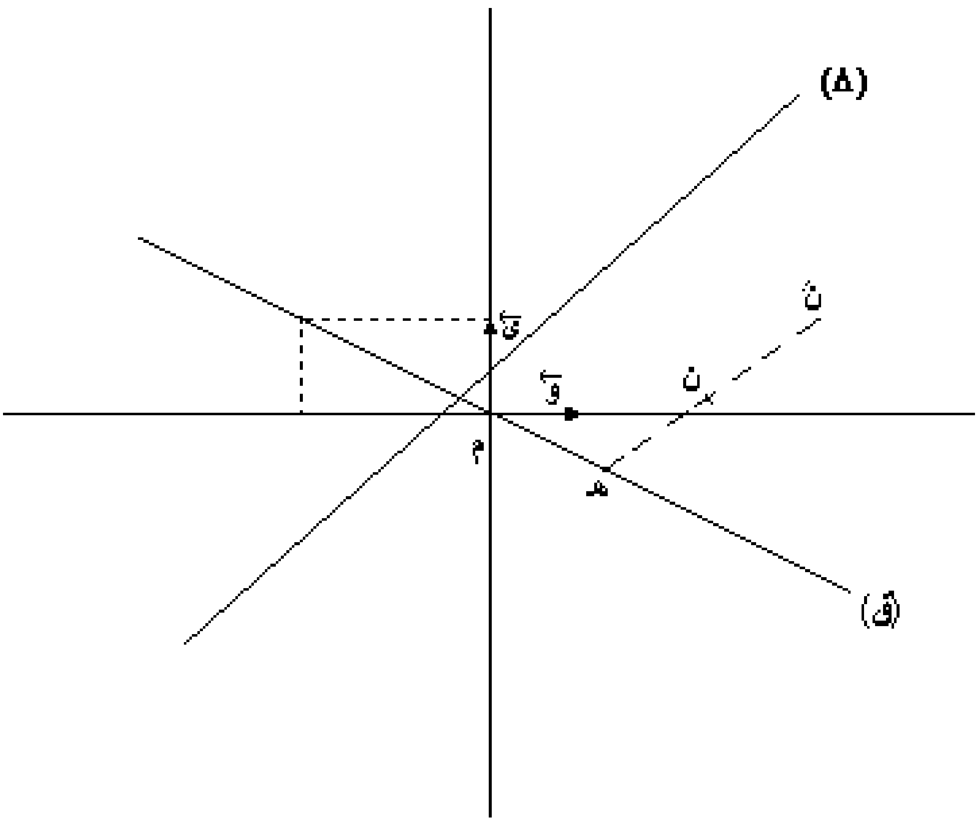
حيث يمثل $(\text{س}_{\text{هـ}} \text{ ، } \text{ع}_{\text{هـ}})$ إحداثيي النقطة هـ.

ولكن هـ $\in$ (ق) وهذا يعني : $\text{س}_{\text{هـ}} + 2\text{ع}_{\text{هـ}} = 0$ (1)

ثم إن : $\overleftarrow{\text{هـ ن}'} // \overleftarrow{\text{ش}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ)

فيكون : $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_{\text{هـ}} & 4 \\ \text{ع} - \text{ع}_{\text{هـ}} & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$2(\text{س} - \text{س}_{\text{هـ}}) - 4(\text{ع} - \text{ع}_{\text{هـ}}) = 0 \qquad (2)$$



وبحل الجملة $\left\{ \begin{array}{l} \text{س}_{\text{هـ}} + 2\text{ع}_{\text{هـ}} = 0 \\ \text{س}_{\text{هـ}} - 2\text{ع}_{\text{هـ}} = \text{س} - 2\text{ع} \end{array} \right.$ حيث $(\text{س}_{\text{هـ}} \text{ ، } \text{ع}_{\text{هـ}})$ هو المجهول.

نجد : $\text{س}_{\text{هـ}} = -\text{ع} + \frac{1}{2}\text{س}$ وَ $\text{ع}_{\text{هـ}} = -\frac{1}{4}\text{س} + \frac{1}{2}\text{ع}$

وبالتعويض في الجملة (*) نحصل على : $\begin{cases} \text{س}' = \frac{3}{2}\text{س} + \text{ع} \\ \text{ع}' = \frac{1}{4}\text{س} + \frac{3}{2}\text{ع} \end{cases}$

وهي العبارة التحليلية للتآلف ف(ق ،Δ ، 2).

7 – 2 – ن صامدة وفق التحويل ت $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س}' = \text{س} \\ \text{ع}' = \text{ع} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \text{س} \\ \text{ع} = \text{س} + 2\text{ع} \end{cases} \Leftrightarrow \text{س} + \text{ع} = 0$$

إذن مجموعة النقط الصامدة هي المستقيم (Δ) ذي المعادلة س + ع = 0

* لدينا : $\overrightarrow{\text{ن ن}'} \begin{pmatrix} \text{س}' - \text{س} \\ \text{ع}' - \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{س} + \text{ع} \end{pmatrix}$

لكن : س + ع ≠ 0 لأن : ن ∉ (Δ).

$$\overrightarrow{\text{ن ن}'} = (\text{س} + \text{ع})\,\vec{\text{ي}}$$

أي أن الشعاع $\overrightarrow{\text{ن ن}'}$ يوازي الشعاع $\vec{\text{ي}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* بما أن هـ هي نقطة تقاطع (ن نَ) مع (Δ).

أي : هـ ∈ (Δ) ومنه : $\text{س}_{\text{هـ}} + \text{ع}_{\text{هـ}} = 0$

ولكن النقط : هـ ، ن ، نَ تنتمي إلى مستقيم واحد يوازي م ع فيكون : $\text{س}_{\text{هـ}} = \text{س}$.

ثم إن : $\overrightarrow{\text{هـ ن}'} \parallel \overrightarrow{\text{هـ ن}} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \text{ح}^* : \overrightarrow{\text{هـ ن}'} = \lambda . \overrightarrow{\text{هـ ن}}$

وبإسقاط العلاقة الشعاعية الأخيرة نجد أن :

س + 2 ع + س = λ (ع + س) ⟺ (س +ع) (2 − λ) = 0

ومنه λ = 2 (لأن : س + ع ≠ 0) .

وبالتالي يكون : $\overrightarrow{\text{هـ ن}'} = 2\,\overrightarrow{\text{هـ ن}}$

وهذا يعني أن التحويل ت تآلف محوره المستقيم (Δ) ذي المعادلة س + ع = 0 ومنحاه م ع (محور التراتيب) ونسبته λ = 2.

المعادلات التفاضلية

الهدف من الدرس : تعيين دالة عددية بمعرفة أحد مشتقاتها المتتابعة على الأقل.

المدة اللازمة لدارسته : 05 ساعات.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

* الإستمرار
* الإشتقاق
* الدوال الأصلية

المراجع : كتاب الرياضيات 3 ث / ع + ر.

المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

1 - مفهوم المعادلة التفاضلية.

2 - حل المعادلة التفاضلية.

3 - تمارين التصحيح الذاتي.

4 - الأجوبة.

1 – مفهوم المعادلة التفاضلية :

1 – 1 – تعريف :

لتكن ع دالة عددية للمتغير الحقيقي س وَ ع ، ع$^{(2)}$، ع$^{(3)}$ ، ... المشتقات المتتابعة للدالة ع.

نسمي معادلة تفاضلية كل علاقة من الشكل :

تا (س ، ع ، عَ ، ع$^{(2)}$ ، . . . . . ، ع$^{(ن)}$) = 0

وتنسب المعادلة التفاضلية إلى المشتق الأعلى رتبة الداخل في تركيبها.

* **مثال :**

عَ = ع + 2 س – 3. هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى

عً + 2 ع = 0 هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

1 – 2 – تعريف :

نسمي حلا للمعادلة التفاضلية :

تا (س ، ع ، عَ ، ع$^{(2)}$ ، . . . . . ، ع$^{(ن)}$) = 0 (*).

في مجال ف كل دالة عددية ع تقبل الإشتقاق ن مرة على المجال ف وتحقق المساواة (*).

***مثال :** الدالة ع بحيث : ع(س) = س^2+5س – 3

هي حل للمعادلة التفاضلية : ع – 2 عَ + عً = س^2+س – 11

لأن : عَ = 2 س + 5.

عً = 2

وَ بالتعويض نجد :

ع – 2 عَ + عً = (س^2 + 5 س – 3) – 2(2 س – 5) + 2

= س^2+5س – 3 – 4س – 10 + 2

= س^2 + س – 11

2 - حل المعادلة التفاضلية :

2 - 1 - حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى :

2 - 1 - 1- المعادلة التفاضلية من الشكل : عَ = تا(س)

إذا كانت الدالة تا مستمرة على مجال ف وكانت ها دالة أصلية للدالة تا في المجال ف فإن :

عَ = تا(س) ⇔ تفا ع = تاَ(س) تفا س

⇔ ∫ تفا ع = ∫ تا(س) تفا س

⇔ ع = ها(س) + جـ / جـ ∈ ح

فالحل العام للمعادلة هو : ع = ها(س) + جـ /جـ∈ ح

* **أمثلة :**

* $ع َ = س^3 - 5 س^2 + س - 1.$

$ع = \int (س^3 - 5 س^2 + س - 1)$ تفا س $= \frac{1}{4} س^4 - \frac{5}{3} س^3 + \frac{1}{2} س^2 - س +$ جـ

جـ ∈ ح

* $ع َ = \frac{س^2 - 3}{س}$ / $س \neq 0.$

$ع = \int \left(\frac{س^2 - 3}{س} \right)$ تفا س $= \int س$ تفا س $- \int \frac{3}{س}$ تفا س.

$ع = \int س$ تفاس $- 3 \int \frac{1}{س}$ تفا س $= \frac{1}{2} س^2 - 3$ لو |س| + جـ /جـ ∈ ح

2 - 1 - 2 - المعادلة التفاضلية من الشكل : عَ =أ ع / أ ∈ ح *.

* نلاحظ أن ع = 0 هو حل ظاهر لهذه المعادلة.

* إذا كان ع ≠ 0 فإن :

$ع َ = أ ع \Leftrightarrow \frac{تفا ع}{تفا س} = أ ع$

$\Leftrightarrow \frac{تفا ع}{ع} = أ$ تفا س

$\Leftrightarrow \int \frac{تفا ع}{ع} = \int أ$ تفا س

$\Leftrightarrow$ لـو|ع| = ٲ س + جـ /جـ ∋ ح

$$\Leftrightarrow ع = \begin{cases} هـ^{ٲس+جـ} \quad ، \quad ع \rangle 0 \\ \text{أو} \\ -هـ^{ٲس+جـ} \quad ، \quad ع \langle 0 \end{cases}$$

فالحل العام لهذه المعادلة هو : ع = λ . هـ^{ٲس} /λ ∋ ح .

* **مثال :** عَ + 5 ع = 0 (1)

(1) $\Leftrightarrow$ عَ = − 5 ع

الحل العام لهذه المعادلة هو : ع= λ . هـ$^{-5س}$ /λ ∋ ح .

2 − 2 − حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية :

2 − 2 − 1 − المعادلة التفاضلية من الشكل : عً = تا(س) :

إذا كانت الدالة تا مستمرة على مجال ف وكانت ها دالتها الأصلية وكانت ها هي الأخرى مستمرة على ف وتقبل عا كدالة أصلية لها فإن :

عً = تا (س) $\Leftrightarrow$ (عَ)َ = تا (س)

$\Leftrightarrow$ تفا عَ = تا(س) تفا س

$\Leftrightarrow$ عَ = ∫ تا (س) تفا س

$\Leftrightarrow$ عَ = ها (س) + جـ /جـ ∋ ح

$\Leftrightarrow$ تفا ع = (ها (س) + جـ) تفا س

$\Leftrightarrow$ عَ = ∫ (ها (س) + جـ) تفا س

$\Leftrightarrow$ ع = عا (س) + جـ (س) + λ / (جـ،λ) ∋ ح^2

أمثلة :

* عً = 2 س − 1.

عَ = ∫ (2 س −1) تفا س = س^2 −س + جـ / جـ ∋ ح

ومنه :

ع = ∫(س^2 − س + جـ) تفا س = $\frac{1}{3}$ س^3 − $\frac{1}{2}$ س^2 + جـ س + λ /(جـ ، λ) ∋ ح^2

* عً = جب (3 س − 1).

عَ = ∫ جب (3 س − 1) تفا س = $-\frac{1}{3}$ تجب (3 س − 1) + جـ

ع = ∫ [$-\frac{1}{3}$ تجب (3 س − 1) + جـ] تفا س.

= $-\frac{1}{3}$ ∫ تجب (3 س − 1) تفا س +∫ جـ تفا س

= $-\frac{1}{9}$ جب (3 س − 1) جـ س +λ / (جـ ، λ)∋ح^2 .

2 − 2 − 2 − المعادلة التفاضلية من الشكل : عً +ω^2ع =0 / ω ∋ ح *

* لتكن ع$_1$(س) = جب ω س

لدينا : عَ$_1$(س) = ω تجب ω س وَ عً$_1$(س) = −ω^2 جب ω س

عً$_1$(س) = −ω^2 ع$_1$ (س)

مما يدل على أن الدالة ع$_1$ هي حل لهذه المعادلة التفاضلية.

* لتكن ع$_2$(س) = تجب ω س

لدينا : عَ$_2$(س) = −ω جبω س وَ عً$_2$(س) = −ω^2تجب ω س = −ω^2ع$_2$ (س)

مما يدل على أن الدالة ع$_2$ هي حل لهذه المعادلة التفاضلية.

نستنتج من ذلك أن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

ع = أع$_1$ +ب ع$_2$ أي :ع (س) =أجب ω س + ب تجبω س/ (أ ، ب) ∋ ح *×ح *

ولنتأكد من ذلك :

لدينا : ع (س) = أ جب ω س + ب تجبω س

عَ (س) = أ ω تجب ω س − ب ω جبω س

عً (س) = − أ ω^2 جب ω س − ب ω^2تجبω س

= ω^2 (أ جب ω س + ب تجبω س) = −ω^2 ع (س)

باختصار : عً + ω^2 ع = 0

إذن : ع (س) = أ جب ω س + ب تجبω س حل لهذه المعادلة التفاضلية

ملاحظة : نقبل وجود هذه الحلول وعدم وجود حلول أخرى.

أمثلة : * عً + 9 ع = 0

يمكن كتابة هذه المعادلة التفاضلية على الشكل : عً + (3)^2 ع = 0

فالحل العام لها هو : ع =أ جب 3 س + ب تجب3 س/ (أ ، ب)∋ ح * × ح *

* 25 عً + π^2ع = 0

يمكن كتابة هذه المعادلة التفاضلية على الشكل : عً+ $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$ع=0

فحلها العام هو : ع =أ جب $\frac{\pi}{5}$س + ب تجب $\frac{\pi}{5}$ س / (أ ، ب)∋ ح* × ح*

3 - تمارين التصحيح الذاتي :

3 - 1 - حل المعادلات التفاضلية الآتية :

* عَ = هـ^{2س}

* عً = جب 3 س

* عَ = $\frac{1}{(س - 2)^2}$ / س ≠ 2

3 - 2 - نعتبر المعادلة التفاضلية الآتية :

عَ - 3 ع = - 5 (1)

* بين أن المعادلة (1) تقبل حلا ثابتاً ع$_0$ = λ_0 حيث يطلب تعيين λ_0.

* لتكن الدالة ع إحدى حلول المعادلة (1) برهن أن الدالة ع$-\lambda_0$ تحقق معادلة من الشكل : عَ +αع = 0 (2) حيث يطلب تعيين قيمةα، ثم حل المعادلة (2).

* إستنتج مجموعة حلول المعادلة (1) .

3 - 3 - لتكن المعادلة التفاضلية : عً + عَ = س^2-س+4 . (1)

حيث ع دالة مجهولة. نضع ع=ص+أ س^2+ب س + جـ .

حيث ص دالة للمتغير س وَ أ ، ب ، جـ ثلاث أعداد حقيقية.

* ما هي قيم أ ، ب ، جـ حتى تحقق الدالة ص المعادلة التفاضلية صً + ص = 0 (2) عندما تحقق الدالة ع المعادلة التفاضلية (1)

* حل المعادلة التفاضلية (2) وإستنتج حلول المعادلة التفاضلية (1)

4 - الأجوبـة :

4 - 1 * عَ = هـ^{2س}

ع = ∫ هـ^{2س} تفا س

نضع : 2 س = α فنجد : تفا α = 2 تفا س ومنه تفا س = $\frac{1}{2}$∫ هـ^{α} تفا α

فيكون : ع = ∫ هـ^{2س} تفا س = $\frac{1}{2}$∫ هـ^{α} تفا α = $\frac{1}{2}$∫ هـ^{α} تفا α

= $\frac{1}{2}$ هـ^{α} + جـ = $\frac{1}{2}$ هـ^{2س} + جـ / جـ ∋ ح

*عً = جب 3 س

عَ = ∫ جب 3 س تفا س = $-\frac{1}{3}$ تجب 3 س + جـ / جـ ∋ح .

ع = ∫($-\frac{1}{3}$ تجب 3 س + جـ) تفا س

ع= $-\frac{1}{3}$ ∫ تجب 3 س تفا س +∫ جـ تفا س

= $-\frac{1}{9}$ جب 3 س + جـ س +λ / (جـ ، λ)∋ ح^{2} .

* عَ = $\frac{1}{(س-2)^{2}}$ / س ≠ 2

ع = ∫ $\frac{1}{(س - 2)^{2}}$ تفا س

نضع α = س − 2. فنجد : تفا α = تفا س ومنه :

ع = ∫ $\frac{1}{α^{2}}$ تفا α / س ≠ 2 ⇔ α ≠ 0

= $-\frac{1}{α}$ + جـ

إذن : عَ = $-\frac{1}{س - 2}$ + جـ / جـ ∋ ح

4 -2 - لدينا المعادلة التفاضلية : عَ − 3 ع = −5 (1)

* نفرض أن : ع = $λ_{0}$ حيث ع حل للمعادلة (1) وَ $λ_{0}$ ∋ ح

إذن عَ = 0 وبالتالي : 0 − 3 $λ_{0}$ = − 5 ومنه : $λ_{0}$ = $-\frac{5}{3}$

* لتكن $ع - \lambda_0$ أي : $ع - \frac{5}{3}$ حلا من حلول المعادلة (2)

لدينا : $(ع - \lambda_0)' = عَ$ وبالتالي يكون : $عَ + \alpha\left(ع - \frac{5}{3}\right) = 0$

أي : $عَ + \alpha ع - \frac{5}{3}\alpha = 0$

وكذلك ع حل للمعادلة (1) فرضا أي : $عَ - 3ع = -5$ أو $عَ - 3ع + 5 = 0$

فيكون لدينا : $\left.\begin{array}{l} عَ + \alpha ع - \frac{5}{3}\alpha = 0 \\ عَ - 3ع + 5 = 0 \end{array}\right\}$

أي : $عَ + \alpha ع - \frac{5}{3}\alpha = عَ - 3ع + 5$

$$عَ + \alpha ع - \frac{5}{3}\alpha - عَ + 3ع - 5 = 0$$

$$(\alpha + 3)\left(ع - \frac{5}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 3 = 0$$

(لأن ع حل للمعادلة (1) فليس من الضروري أن يساوي $\frac{5}{3}$).

إذن : $\alpha = -3$

حل المعادلة (2) :

$عَ - 3ع = \Leftrightarrow عَ = 3ع$.

وهي معادلة من الشكل : $عَ = أ ع$ حيث $أ = 3$.

فحلها العام هو : $ع = \lambda$. هـ^{3س} / $\lambda \in ح$.

* إن كل حل للمعادلة (1) وليكن ع ينتج عنه حل للمعادلة(2) من الشكل $ع - \frac{5}{3}$

ولدينا حل المعادلة (2) هو : $ع = \lambda$. هـ^{3س} فيكون : $ع - \frac{5}{3} = \lambda$. هـ^{3س} ومنه :$ع = \frac{5}{3} + \lambda$. هـ^{3س} / $\lambda \in ح$

وهو الحل العام للمعادلة (1).

4 - 3 - لدينا المعادلة التفاضلية : $عً + عَ = س^2 - س + 4$. (1)

لدينا : $ع = ص + أ س^2 + ب س + جـ$.

$عَ = صَ + 2أ س + ب$ و $عً = صً + 2أ$

ص تحقق المعادلة : صً + ص = عندما تحقق ع المعادلة (1)

هذا يعني : (صً + 2ا) + (ص + ا س^2 +ب س + جـ) = س^2 – س + 4

أي : صً + ص + ا س^2 + ب س + جـ + 2ا = س^2 – س + 4

ولدينا فرضاً : صً + ص = 0

نستنتج أن : ا س^2 + ب س + جـ + 2ا = س^2 – س + 4

وبالمطابقة ينتج : ا = 1 وَ ب = – 1 وَ جـ = 6.

وعندئذ : ع = ص + س^2 – س + 6.

* حل المعادلة التفاضلية (2).

لدينا : صً + ص = 0

وهي من الشكل : صً + ω^2 ص = 0 حيث $\omega^2 = 1$.

فحلها العام من الشكل : ص = ا تجب س + ب جب س / (ا ،ب) ∋ ح^2.

ومنه : الحل العام للمعادلة (1) :

ع = س^2 – س + 6 + ا تجب س + جب س / (ا ،ب) ∋ ح^2.

الإحتمالات

خاص بشعبة علوم طبيعية والحياة فقط

المدة اللازمة لدراسته : 06 ساعات

الدروس الذي ينبغي الرجوع إليها :

* المجموعات (المفاهيم العامة).
* العمليات على المجموعات.
* التحليل التوفيقي.

تصميم الدرس

1 – جبر الحوادث.
2 – العمليات على الحوادث.
3 – التعريف الرياضي للآحتمال.
4 – فضاء الإحتمال.
5 – الخواص الأساسية للإحتمال.
6 – الفضاء المنتهي المنتظم.
7 – الإحتمال الشرطي والحوادث المستقلة.
8 – المتغير العشوائي الحقيقي.
9 – الأمل الرياضي لمتغير عشوائي حقيقي.
10 – أسئلة التصحيح الذاتي
11 – أجوبة التصحيح الذاتي

1 – جبر الـحـوادث :

1 – 1 – الإخـتـبـار ومـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات :

كـل عـمـلـيـة أو تـجـربـة نـقـوم بـهـا تـكـون مـتـبـوعـة بـنـتـيـجـة عـشـوائـيـة وغـيـر مـؤكـدة ولـكـنـنـا نـعـلـم أنـهـا سـتـكـون نـتـيـجـة مـن بـيـن نـتـائـج مـجـمـوعـة مـعـيـنـة نـقـول أن هـذه الـعـمـلـيـة "إخـتـيـار" وكـل نـتـيـجـة مـمـكـنـة تـدعـى إمـكـانـيـة وتـسـمـى مـجـمـوعـة كـل الـنـتـائـج : "مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات" ونـرمـز لـهـا بـالـرمـز Ω

1 – 1 – 1 – مـثـال :

لـيـكـن الإخـتـبـار الـمـتـمـثـل فـي رمـي قـطـعـة نـقـود مـرة واحـدة. فـعـنـد إلـقـائـهـا يـبـتـدئ الاخـتـبـار وبـعـد سـقـوطـهـا مـبـاشـرة يـنـتـهـي الاخـتـبـار ومـنـه مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات هـي :

Ω = { ط ، ر} بـحـيـث ط هـو الـوجـه الـذي يـحـمـل الـرقـم وَ ر هـو الـوجـه الـذي يـحـمـل الـشـعـار.

1 –1 – 2 – مـثـال :

بـعـد الاخـتـبـار الـمـتـمـثـل فـي إلـقـاء زهـرة الـنـرد مـرة واحـدة فـإن كـل وجـه يـحـمـل رقـمـا مـحـصـورا بـيـن 1 وَ 6 هـو إمـكـانـيـة ومـنـه مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات هـي : Ω = { 1، 2، 3، 4 ، 5، 6}.

1 –1 – 3 – مـثـال :

مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات الـمـرتـبـطـة بـالاخـتـيـار الـمـتـمـثـل فـي إلـقـاء قـطـعـة نـقـود مـرتـيـن هـي : Ω = { (ط، ط)، (ط، ر)، (ر ، ر)، (ر ، ط)}.

الإمـكـانـيـة (ط، ر) مـعـنـاه ظـهـور الـوجـه الـذي يـحـمـل الـرقـم فـي الـرمـيـة الأولى وظـهـور الـوجـه الـذي يـحـمـل الـشـعـار فـي الـرمـيـة الـثـانـيـة.

1 – 2 – الـحـادث :

تـعـريـف :

لـتـكـن Ω مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات إن كـل مـجـمـوعـة جـزئـيـة مـنـهـا أحـاديـة الـعـنـصـر نـسـمـيـهـا حـادثـا بـسـيـطـا أو حـادثـا أولـيـا وكـل مـجـمـوعـة جـزئـيـة أخـرى غـيـر بـسـيـطـة تـدعـى حـادثـا مـركـبـا أو بـاخـتـصـار "حـادث". ومـنـه نـسـمـي مـجـمـوعـة أجـزاء مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات Ω بـمـجـمـوعـة الـحـوادث ويـرمـز لـهـا بـالـرمـز ج (Ω).

1 – 2 – مثـال :

الاختبـار المتمـثل فـي إلـقـاء زهـرة الـنـرد مـرة واحدة حـوادثـه البسيطـة هي :{ 1}، { 2}،{ 3 }،{ 4}،{ 5}،{ 6}.

ملاحظـة :

كـل حــادث مـركـب يـتـحـلـل إلــى اتـحــاد أو تقــاطـع عــدد منتـه من حـوادث بسيطـة. فمـثـلا الـحـادث المـركب : **س** ={1 ، 2 ، 5} هو اتحاد الحـوادث البسيطـة التـالية :{ 1}، { 2}،{ 5}

1 – 3 – وقـوع حـادث :

إذا فرضــنـا أنــه قبل الاختبـار اهـتمينـا بـالـحـادث **س** الـذي يـشمـل الـنـتيـجـة الـمـمكـنـة؟. فـإذا ظـهـرت الـنـتـيـجـة الـمـمكـنـة؟ بـعـد قيامـنـا بـهـذا الاخـتـبـار نـقـول أن الـحـادث **س** قد وقـع أو تـحـقـق. أي بـصـورة عـامـة نـقـول عـن حـادث **س** مـرتـبـط بـاخـتـبـار إنـه وقـع أو تـحـقـق إذا ظـهـر أحـد عـنـاصـره بـعـد الاخـتـبـار.

1 – 3 – 1 – مثـال :

لـيـكـن س ={ 1، 3، 5 } وَ **ع** ={ 2، 4} حـادثـيــن مـرتـبـطـيــن بـإلـقـاء زهـرة الـنـرد مـرة واحـدة ونـفـرض بـعـد رمـيـهـا ظـهـرت الإمـكـانـيـة 3 نـقـول إن **س** قد وقـع لأن 3 يـنـتـمـي إلـى **س** وَ **ع** لـم يـتـحـقـق لأن 3 لا يـنـتـمـي **ع**.

1 – 4 – الـحـادث الأكـيـد :

إذا كـانــت Ω مـجـمـوعــة الإمـكـانـيـات لاخـتـبـار مــا. فـبـعـد إجـراء الاخـتـبـار سـتـظـهـر حـتـمـا إحــدى الـنــتـائـج الـمـمكــنـة وبـالـتـالــي الـحــادثΩ هــو حــادث أكـيـد وقـوعــه ولـهــذا ســمــيΩ بـالـحـادث الأكـيـد.

1 – 4 – 1 – مـثـال : Ω = { ط، ر} هـو حـادث أكـيـد لـلاخـتـبـار الـمـتـمـثـل فـي إلـقـاء قـطـعـة نـقـود مـرة واحـدة.

1 – 5 الـحـادث الـمـسـتـحـيـل :

بـعـد إلـقـاء قـطـعـة نـقـود مـرة واحـدة فـإن الـحـادثـين الـبـسـيـطـين لـه همـا{ ط}،{ ر} ونـعـلـم أن تـقـاطـعـهـمـا{ط} ∩ { ر} هـو مـجـمـوعـة جـزئـيـة منΩ وبـالـتـالـي هـي أيـضـا حـادث حـيـث{ ط } ∩ { ر} = ∅ ونـلاحـظ أن هـذا الـحــادث يـتـمـثـل فـي ظـهـور الـوجـهـين لـلـقـطـعـة مـعـا وهـو مـا لا يـمـكـن وقـوعـه أو تـحـقـيـقـه ولـهـذا نـسـمـي الـحـادث∅ بـالـحـادث الـمـسـتـحـيـل.

2 - العمليات على الحوادث :

في كل ما يأتي **س، ع، ص** ثلاثة حوادث مرتبطة بنفس الإختبار حيث مجموعة إمكانياتهΩ ومجموعة الحوادث ج (Ω).

2 - 1 - حادث يستلزم آخر :

نقول إن الحادث **س** يستلزم الحادث **ع** ونكتب **س**⊃ **ع** إذا وفقط إذا كان وقوع الحادث **س** يؤدي إلى وقوع الحادث **ع**.

2 - 1 - 1 - مثال :

كيس يحتوي على 10 قريصات منها 5 بيضاء وتحمل أرقاما فردية و5 سوداء تحمل أرقاما زوجية. وليكن الحادثين.

س : ظهور قريصة تحمل رقما زوجيا.

ع : ظهور قريصة تحمل رقما يقبل القسمة على 4.

فبعد سحب قريصة واحدة بطريقة عشوائية فإنه إذا تحقق الحادث **ع** فإن **س** يتحقق حتما لأن كل رقم يقبل القسمة على 4 هو رقم زوجي.

2 - 2 — الحادثان المتعاكسان :

إذا كان س حادثا للمجموعةΩ فإن متممة المجموعة س بالنسبة للمجموعةΩ هي مجموعة جزئية منΩ نرمز لها بالرمز $\overline{\text{س}}$ ونكتب : $\overline{\text{س}} = \text{ت}_{\Omega}\,\text{س}$ ومنه نلاحظ بعد الإختبار إن وقوع الحادث س ينفي وقوع الحادث $\overline{\text{س}}$ والعكس صحيح ولهذا نقول أن الحادثين س وَ $\overline{\text{س}}$ هما حادثان متعاكسان.

ملاحظة :

س وَ س حادثان متعاكسان $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} \cap \overline{\text{س}} = \phi \\ \text{وَ} \\ \text{س} \cup \overline{\text{س}} = \Omega \end{cases}$

2 - 3 - الحادث س ∪ ع :

إذا كان س وَ ع حادثين فإن س أو ع هو أيضا حادث نرمز له بالرمز س ∪ ع ومنه نقول أن الحادث س ∪ ع قد وقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحادثين على الأقل.

2 – 4 – الحادث س ∩ ع :

إذا كان س وَ ع حادثين فإن س وَ ع هو أيضاً حادث نرمز له بالرمز س ∩ ع ومنه نقول أن الحادث س ∩ ع قد وقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحادثان س وَ ع معًا.

2 – 5 – الحادثان غير المتلائمين :

إذا كان س وَ ع حادثين حيث : س ∩ ع =∅ نقول أنهما حادثين غير متلائمين. ومنه وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر. والعكس ليس صحيحاً.

2 – 6 – الحادث س – ع :

إذا كان س وَ ع حادثين فإن س– ع هي مجموعة جزئية من Ω وَبالتالي هي الأخرى حادث وَ وقوعها ينفي حتما وقوع ع.

2 – 7 – الحادث س Δ ع :

بما أن س وَ ع حادثان فإن سΔ ع هي مجموعة جزئية من Ω وبالتالي هي أيضا حادث، ويقع إذا وقع س بدون أن يقع ع أو العكس.

وإليك الجدول الآتي الذي يوضح استعمال المجموعات في دراسة الإحتمالات.

المجموعات	لغة الإحتمالات
المجموعة الكلية Ω	مجموعة الإمكانيات Ω
س مجموعة جزئية من Ω	س حادث
المجموعة الخالية ∅	الحادث المستحيل
مجموعة أجزاء المجموعة Ω : ج (Ω)	مجموعة الحوادث ج (Ω)
$\overline{\text{س}}$ متممة المجموعة س بالنسبة للمجموعة Ω	$\overline{\text{س}}$ الحادث المعاكس للحادث س
س ∩ ع : تقاطع مجموعتين س وَ ع	س ∩ ع : حادث، وصل الحادثين س وَ ع
س ∪ ع : إتحاد مجموعتين س و ع	س ∪ع : حادث، فصل الحادثين س أو ع
س – ع : الفرق بين المجموعتين	س – ع : حادث.
س Δ ع: الفرق التناظري للمجموعتين	سΔ ع :حادث، فصل مانع للحادثين س وَع.
س ∩ ع = ∅ أي س و ع منفصلتين	س ∩ ع = ∅ س وَع غير متلائمين
س ⊂ ع : محتواة في ع	س ⊂ ع : : الحادث س يستلزم الحادث ع.

3 – التعريف الرياضي للاحتمال :

3 . 1 . تعريف :

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات وج(Ω) مجموعة أجزاء المجموعةΩ وَ ل تطبيق من ج (Ω) إلى ح+ حيث ح+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة أي : ل : ج (Ω) ← ح+ نقول أن التطبيق ل هو احتمال على المجموعة ج (Ω) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان :

1 – صورة Ω وفق ل هي 1 أي : ل (Ω) =1

1 – $\forall$س $\ni$ ج (Ω)، $\forall$ ع $\ni$ ج (Ω) :

س $\cap$ ع = $\varnothing$ فإن : ل (س $\cup$ ع) = ل (س) + ل (ع).

ملاحظات :

1 – من خلال هذا التعريف يجب أن نفرق بين ل وَ ل (س) لأن الاحتمال ل هو تطبيق من ج (Ω) إلى ح+ بينما ل (س) هو احتمال الحادث س وهو عدد حقيقي موجب.

2 – $\forall$ س $\ni$ ج (Ω) : ل (س) $\geq$ 0.

3 – إحتمال الحادث الأكيد يساوي 1.

4 – إحتمال إتحاد حادثين غير متلائمين يساوي مجموع إحتماليهما.

3 – 2 مثال :

لتكن Ω ={ط، ر} مجموعة الإمكانيات المرتبطة بالاختبار المتمثل في إلقاء قطعة نقود مرة واحدة.

1 – نفرض أن هذه القطعة متجانسة وَ وجهيها متماثلين ولكل وجه نفس الحظ للظهور بعد رميها. عرّف علىΩ إحتمالاً ل.

2 – بفرض هذه المرة القطعة محدبة بحيث إحتمال ظهور الوجه ر يفوق إحتمال ظهور الوجه ط بخمسة مرات. عرف علىΩ إحتمالا لً.

3 – ماذا نستنتج من هذين السؤالين؟

الحل :

1 – لدينا مجموعةΩ ={ط، ر}. لتعريف الإحتمال ل على Ω. يكفي أن يوجد عددين حقيقيين موجبينα_1 و α_2 بحيث يحققان ما يلي :

ل ({ط}) = α_1 ، ل ({ر}) = α_2 وَ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

حتى يكون ل $(\Omega) = 1$ لأن $\Omega = \{ط\} \cup \{ر\}$

بما أن القطعة متجانسة وَ وجهيها متماثلين فمن الطبيعي فرض

ل $(\{ط\})$ = ل $(\{ر\})$ وَمنه نجد :

2 ل $(\{ط\}) = 1$ أي $2\alpha_1 = 1$ نستنتج أن $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

ويكون ل $(\{ر\}) = \alpha_2 = \frac{1}{2}$

النتيجة :

يوجد إحتمال ل معرّف على Ω كالآتي :

$\{س_{هـ}\}$	$\{ط\}$	$\{ر\}$
$\{ل_{هـ}\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

حيث $\{س_{هـ}\}$ حادث بسيط وَ ل $_{هـ}$ إحتماله.

2 – مجموعة الإمكانيات هي دومًا $\Omega = \{ط، ر\}$

ولنعرف من جديد إحتمال لَ بالعددين α'_1 وَ α'_2 بحيث ل $(\{ط\}) = \alpha'_1$ ، ل $(\{ر\}) = \alpha'_2$ مع $\alpha'_1 + \alpha'_2 = 1$

بما أن القطعة محدبة حيث لَ $(\{ر\}) = 5$ لَ $(\{ط\})$ فإن :

$\alpha'_2 = 5\alpha'_1$ نجد $\alpha'_1 + 5\alpha'_1 = 1 \Leftrightarrow 6\alpha'_1 = 1$ أي $\alpha'_1 = \frac{1}{6}$.

نستنتج أن لَ $(\{ط\}) = \frac{1}{6}$ وَ لَ $(\{ر\}) = \frac{5}{6}$.

النتيجة :

يوجد إحتمال لَ معرف على Ω كالآتي :

$\{س_{هـ}\}$	$\{ر\}$	$\{ر\}$
$\{لَ_{هـ}\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

3 – الاستنتاج : من السؤالين نستنتج ما يلي :

يمكن تعريف إحتمالين على نفس المجموعة.

4 – فضـاء الإحتـمـال :

4 – 1 تـعريـف :

نسـمـي فضـاء إحتمـال كل ثـلاثـيـة (Ω، ج (Ω)، ل) حيث Ω مجموعـة الإمكـانـيـات، ج (Ω) مـجـمـوعـة أجزاء المـجـمـوعـة Ω وَ ل إحتـمال معرّف علـى ج (Ω).

*** مـلاحـظـة :**

إذا كانـت Ω مجـمـوعـة منتـهـيـة نـقـول أن الـفـضـاء (Ω، ج (Ω)،ل) فضـاء إحـتـمـال منتـه وهـذا مـا نفرضـه في كـل ما يـأتـي.

4 – 2 – نـظـريـة :

إحـتـمـال الـحـادث الـمـسـتـحـيـل مـعـدوم.

الـبـرهـان :

لـديـنـا س $\cup$ $\varnothing$ = س وَ س $\cap$ $\varnothing$ = $\varnothing$

إذن ل (س $\cup$ $\varnothing$) = ل(س)

وكـذلـك ل(س) + ل ($\varnothing$) = ل(س)

ومـنـه ل($\varnothing$) = ل (س) – ل(س)

نـجـد ل($\varnothing$) = 0

4 – 3 – مـثـال :

لـتـكـن Ω = {ط ، ر} مـجـمـوعـة الإمـكـانـيـات.

وَ ج(Ω) = { $\varnothing$ ، {ط}، {ر}، Ω }مـجـمـوعـة الـحـوادث الـمـرتـبـطـة بـالإخـتـبـار الـمـتـمـثـل فـي إلـقـاء قـطـعـة نـقـود مـرة واحـدة ولـيـكـن الـتـطـبـيـقـان $ل_1$ وَ $ل_2$ المـعـرفـان كـمـا يـلـي :

$ل_1$: ج (Ω) $\longrightarrow$ $ح_+$ حيث $ل_1$ ({ط}) = 0,5 وَ $ل_1$ ({ر}) = 0,5

وَ $ل_1$ ({ ط ، ر}) = 1.

$ل_2$: ج (Ω) $\longrightarrow$ $ح_+$ حيث $ل_2$ ({ط}) = 0,21 وَ $ل_1$ ({ر}) = 0,53

وَ $ل_2$ ({ط ، ر}) = 1.

هـل الـتـطـبـيـقـان $ل_1$ وَ $ل_2$ إحـتـمـالـيـن؟

الحل :

لدينا Ω ={ط} U {ر} ومنه :

ل $_1$ (Ω) = ل $_1$({ط} U {ر}) وَ ل $_1$ ({ط}) + ل $_1$ ({ر}) = 0,5 + 0,5 = 1.

ل $_1$ ({ط} U {ر}) = 1 نجد ل $_1$ ({ط} {ر}) = ل $_1$ ({ط}) + ل $_1$ {ر})

نستنتج أن ل $_1$ إحتمال وَ (Ω، ح (Ω)،ل $_1$) فضاء إحتمال منته.

ل $_2$ (Ω) = ل $_2$({ط}U{ر}) وَ ل $_2$ ({ط} + ل $_2$ ({ر}) =0,21 + 0,53 = 0,74.

ومنه ل $_2$({ط} U {ر}) ≠ وَ ل $_2$ ({ط} + ل $_2$({ر})) نستنتج أن :

ل $_2$ ليس احتمال وَ (Ω، ج(Ω)، ل $_2$) ليس فضاء احتمال.

5 – الخواص الأساسية للآحتمال :

5 – 1 – مجموع إحتمالي حادثين متعاكسين يساوي الواحد.

البرهان :

ليكن س وَ $\overline{س}$ حادثين مرتبطين بنفس الاختبار الذي مجموعة إمكانياتهΩ ومنه س ∩ سَ = ∅ وَ س U سَ = Ω

إذن ل (س U سَ) = ل (Ω) أي ل (س U سَ) = 1.

لأن ل إحتمال وبالتالي ل (Ω) = 1.

ل (س U سَ) = ل (س) + ل (سَ) (لأن ل إحتمال).

نستنتج أن ل (س) + ل ($\overline{س}$) =1.

ومنه $\boxed{\text{ل (سَ) = 1 – ل (س) .}}$

5 – 2 – إذا كانت س ، ع ، ص ثلاثة حوادث غير متلائمة مثنى مثنى فإن ل (سU ع U ص) = ل (س) + ل(ع) + ل(ص).

البرهان :

لدينا س ∩ ع =∅ وَ س ∩ ص = ∅ وَ ع ∩ ص = ∅

إذن (س ∩ ص) U (ع ∩ ص) = ∅ ومنه (س U ع) ∩ ص = ∅

(لأن عملية التقاطع توزيعية بالنسبة لعملية الاتحاد).

نجد : ل (س U ع U ص) = ل [(س U ع) U ص] (لأن الاتحاد تجميعي).

= ل (س U ع) + ل (ص)

(لأن ل إحتمال وَ (س U ع) ∩ ص = Ø)

= ل(س) + ل(ع) + ل(ص) لأن ل إحتمال وَ س ∩ ع = Ø

نستنتج أن : ل (س U ع U ص) = ل(س) + ل(ع) + ل(ص).

ملاحظة :

بما أن الحوادث البسيطة غير متلائمة مثنى مثنى فإن مجموع إحتمالاتها يساوي الواحد.

لأن ل (Ω) = 1 وَ Ω = {س$_1$} U {س$_2$} U . . . U {س$_ن$}.

بفرض Ω منتهية.

وبالتالي : ل ({س$_1$} U {س$_2$} U . . . U {س$_ن$}) = ل (Ω) يكافئ أن ل ({س$_1$}) + ل ({س$_2$}) + . . . + ل ({س$_ن$}) = 1

5 – 3 – إذا كان الحادث س يستلزم الحادث ع فإن احتمال الحادث ع أكبر من إحتمال الحادث س.

أي س ⊂ ع ⇐ ل (ع) ≥ ل(س).

البرهان :

بما أن الحادث س يستلزم الحادث ع فإن س محتواة في ع أي س ⊂ ع ومنه يمكننا كتابة ع كالآتي :

ع = س U (ع – س) حيث س ∩ (ع – س) = Ø.

إذن ل (ع) = ل [س U (ع – س)] ⇔ ل (ع) = ل (س) + ل (ع – س).

⇔ ل (ع) – ل (س) = ل (ع – س).

وبما أن ل إحتمال فإن ل (ع – س) ≥ 0 نجد ل (ع) – ل(س) ≥ 0.

أي ل (ع) ≥ ل (س).

*** نتيجة :**

∀ س ∋ ج (Ω) : ∅ ⊂ س وَ س ⊂ Ω نستنتج أن :

ل (س) ≥ ل (∅) ⇔ ل (س) ≥ 0

وَ ل (Ω) ≥ ل (س) ⇔ 1 ≥ ل (س)

إذن ∀ س ∋ ج (Ω) : 0 ≤ ل (س) ≤ 1

5 – 4 – إذا كان س وَ ع حادثين كيفيين فإن :

ل(س ∪ ع) = ل(س) + ل(ع) – ل(س ∩ع).

البرهان :

لدينا س ∪ ع = (س − ع) U (س ∩ ع) ∪ (ع−س) حيث (س−ع) وَ س ∩ ع

وَ (ع−س) ثلاثة حوادث غير متلائمة.

إذن حسب الخاصّية (5 − 3) فإن :

ل (س ∪ ع) = ل [(س − ع) ∪ (س ∩ ع) ∪ (ع − س)].

ل (س ∪ ع) = ل (س − ع) + ل (س ∩ ع) + ل (ع − س).

وحسب برهان الخاصية (5 −3) وجدنا ل(س) = ل (ع ∩س) + ل (س − ع)

وَ ل (ع) = ل (س ∩ ع) + ل (ع – س).

ومنه ل(س) + ل (ع) = ل(س ∩ ع) + ل(س−ع) + ل(س ∩ ع) + ل (ع − س).

= ل (س ∪ ع) + ل(س ∩ ع)

نستنتج أن ل(س ∪ ع) = ل(س) + ل(ع) −ل(س ∩ع).

ملاحظة :

إذا كان س وَ ع حادثين غير متلائمين فإن س ∩ ع =Ø .

ونعلم أن ل (Ø) = 0

لهذا يكون ل(س U ع) = ل(س) + ل(ع).

6 – الفضاء المنتهي المنتظم :

ليكن (Ω، ج(Ω)، ل) فضاء إحتمال منتهي حيث أصلي Ω يساوي ن.

6 – 1 – الحوادث ذات الإحتمالات المتساوية :

تعريف :

نقول عن حادثين س وَ ع أنهما متساويي الاحتمال إذا وفقط إذا كان ل(س) = ل(ع).

6 – 1 – 1 – مثال :

لنعتبر زهرة نرد متجانسة ومتماثلة ومتقنة الصنع ونفرض أن إلقاء هذه الحجرة مرة واحدة مستقل عن الشخص الذي يقوم بهذا الإختبار.

في هذه الحالة لا نستطيع أن نعطي أفضلية ظهور أي وجه على الآخر نقول أن الحوادث البسيطة متساوية الإحتمال ومنه:

يكون ل({1}) = ل({2}) = ل({3}) = ل({4}) = ل({5}) = ل({6}).

وبما أن هذه الحوادث غير متلائمة مثنى مثنى نجد إتحادها هو Ω

فـإن ل(Ω) = ل$(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\})$ ومنـه
1 = ل$(\{1\})$ + ... +ل $(\{6\})$ ⇔ 1 = 6 ل $(\{1\})$.
ومنـه ل$(\{1\})$ = $\frac{1}{6}$ أي أن كل حـادث بـسيط إحـتمـالـه $\frac{1}{6}$.

6 – 2 – الـفضـاء الـمنـهـي الـمنـتظـم :

لـيكـن الإحـتمـال ل الـمعـرف علـى مجـموعـةΩ غيـر خـالـيـة ومنـهـيـة حيـث :
$\Omega = \{$س $_1$ ، س $_2$ ، س $_3$ ، ...... ، س $_ن\}$.
إذا كـانـت كـل الـحـوادث الأولـيـة متـسـاويـة الإحـتمـال فـإن ل$($س $_1)$ = ل$($س $_2)$ = ... = ل$($س $_ن)$ = $\frac{1}{ن}$ نقـول أن $(\Omega$، ج(Ω)، ل$)$ فضـاء متـسـاوي الإحـتمـال منـتظـم.

6 – 3 – إستـنـتـاج :

إحـتمـال كـل حـادث س يـعـبر عـنـه بـدلالـة كـل مـن أصلـيΩ وأصلـي س لأن كـل حـادث س كيـفـي هـو مجـموعـة جزئـيـة مـن Ω وبـالـتـالـي يمكـن اعـتبـاره اتـحـاد حـوادث بـسيـطـة منـتـهيـة وهـي غيـر متـلائـمـة مثـنـى مثـنـى وَمتـسـاويـة الإحـتمـال ومنـه :

إذا كـان : س $=\{$س $_1$ ، س $_2$ ، ...... ، س $_هـ\}$

فـإن : س $=\{$س $_1\} \cup \{$س $_2\} \cup$ .... $\cup \{$س $_هـ\}$

يـكـون ل$($س$)$ = ل$(\{$س $_1\})$ + ل$(\{$س $_2\})$ + ... + ل$(\{$س $_هـ\})$.

= هـ . ل$(\{$س $_1\})$ بمـا أن ل$(\{$س $_1\})$ = $\frac{1}{ن}$ (حسـب 6 –1)

نـجـد : ل$($س$)$ = $\frac{هـ}{ن}$ أي ل$($س$)$ = $\frac{\text{أصلـي (س)}}{\text{أصلـي }(\Omega)}$

حيـث يمـثـل هـ عـدد الـحـالات الـمـواتـيـة لـلـحـادث س وَ نَ عـدد الـحـالات الـممـكنـة لـلآختـيـار

نـتـيـجـة :

∀ س ∍ ج(Ω) : ل$($س$)$ = $\frac{\text{عدد الـحالات المواتيـة للـحادث س}}{\text{عدد الـحالات الممكنة}}$

6 – 3 –1 – مثـال :

نـرمـي زهـرة متـجـانـسـة وَ أوجـهـهـا الـسـتـة متـمـاثـلـة ومـرقـمـة مـن 1 إلـى 6.

مـا هـو احتمـال الحـادث س : " الـرقم الـذي يظـهـر علـى الـوجـه الأعلـى لـلـحـجـرة، زوجـي أو يـسـاوي 5 ".

الحل : لدينـا مجموعـة الإمكانيـات هي : $\Omega = \{ 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ،6 \}$

حسـب المـثـال (6 – 1 – 1) لـديـنـا احـتمـال أي حـادث بـسـيط يـسـاوي $\frac{1}{6}$ لأن الـفـضـاء منـتـهـي ومـنـتـظـم. نـلاحـظ أن الـحـادث س معـرف بمـا يـلـي :

س = $\{ 2 ، 4 ،6 \} \cup \{ 5 \}$ أي س =$\{ 2 ، 4 ،5 ، 6 \}$.

إذن : ل(س) $= \frac{\text{أصلي س}}{\text{أصلي } \Omega} = \frac{4}{6}$ أي : ل(س) $= \frac{2}{3}$

7 – الاحـتـمـال الـشـرطـي والـحـوادث الـمـسـتـقـلـة :

7 – 1 مثـال :

ليكـــن س = $\{ 1 ، 3 ، 4 ،6\}$ و ع = $\{ 1 ، 2 ، 3 ،5\}$ حـادثيـــن مـرتـبـطـيـــن بـالاخـتـــبـار المـتـمـثـل فـي إلـقـاء زهـرة الـنـرد مـرة واحـدة. لـنـفـرض أنـه بـعـد الاخـتـبـار، الـحـادثع قـد وقـع بـدون مـعـرفـة الـوجـه الـذي ظـهـر . و نـهـتم بـحـسـاب إحتمال الـحـادث س.

أو-لا بـمـا أن الـحـادث ع قـد وقـع فـإن الـوجـه الـذي ظـهـر يـحـمـل حـتـمـا رقـمـا مـن عـنـاصـرع ولـهـذا فـالـوجـهـان الـلـذان يـحـمـلان الـرقـمـيـن 4 ، 6 مـسـتـحيـل ظـهـورهـمـا لأنـهـمـا غـيـر مـوجـوديـن فـيع ومـنـه الـحـادث س يـتـحـقـق إذا ظـهـر وجـه يـحـمـل رقـمـا مـن س $\cap$ ع وفـي هـذه الـحـالـة يـكـون إحـتـمـال الـحـادث س هو $\frac{2}{4}$ أي $\frac{1}{2}$ (لأن أصـلـي س $\cap$ ع يسـاوي 2 و أصـلـي ع يساوي 4) وَنـرمـز لـه بـالـرمـز ل$_{ع}$(س) ونـكـتـب :

ل$_{ع}$ $= \frac{1}{2}$ فـنـقـول إن ل$_{ع}$ هـو احـتـمـال شـرطـي ونـرمـز لـه بـالـرمـز: ل$_{ع}$(س) ونـكـتـب

ل$_{ع}$(س) $= \frac{1}{2}$ وَنـقـرأ " إحـتـمـال الـحـادث س بـشـرط وقـوع الـحـادثع ".

تـعـريـف الاحتمال الـشـرطـي :

س وَع حـادثـان حـيـث ل(ع) ≠ 0 و س ∩ ع ≠ ∅.
نـسـمـي احـتـمـالا شـرطـيا لـلـحـادث س بـالـنـسـبـة لـلـحـادثع (أي احـتـمـال وقـوع الـحـادث س عـلـمـا أن الـحـادثع قد تحقق) ونرمـز لـه بـالـرمـز $ل_{ع}$(س) أو ل(س\ ع) حـيـث :

$$ل_{ع}(س) = \frac{ل(س \cap ع)}{ل(ع)}$$

*** مـلاحـظـة :**

الاحـتـمـال الـشـرطـي هـو الآخـر احـتـمـال لأنـه يـحـقـق مـا يـلـي :

* إذا كـان س = ع فـإنـه س ∩ ع = ع ومـنـه $ل_{ع}(ع) = \frac{ل(ع)}{ل(ع)} = 1$.

* إذا كان س ∩ ص = ∅ حـيـث : س∩ع ≠ ∅ و ص ∩ ع =∅ فـإن :

$$ل_{ع}(س) = \frac{ل(س \cap ع)}{ل(ع)} \quad \text{وَ} \quad ل_{ع}(ص) = \frac{ل(ص \cap ع)}{ل(ع)}$$ وبـالـتـالـي :

$$ل_{ع}(س \cup ص) = \frac{ل[(س \cup ص) \cap ع]}{ل(ع)} = \frac{ل[(س \cap ع) \cup (ص \cap ع)]}{ل(ع)}$$

$$= \frac{ل[(س \cap ع) + (ص \cap ع)]}{ل(ع)}$$

ومـنـه $$ل_{ع}(س \cup ص) = \frac{ل(س \cap ع)}{ل ع} + \frac{ل(ص \cap ع)}{ل(ع)}.$$

أي $$ل_{ع}(س \cup ص) = ل_{ع}(س) + ل_{ع}(ص)$$

7 – 3 - الـحـادثـان الـمـسـتـقـلان :

نـقـول عـن حـادثـيـن س وَع مـخـتـلـفـيـن عـن الـحـادث الـمـسـتـحـيـل أنـهـمـا مـسـتـقـلان إذا وفـقـط إذا كـان وقـوع الأول لا يـؤثـر عـلـى وقـوع الـثـانـي أي :

$$\text{س وَ ع مـسـتـقـلان} \Leftrightarrow \begin{cases} ل_{ع}(س) = ل(س) \\ \text{\ وَ} \\ ل_{س}(ع) = ل(ع) \end{cases}$$

ومـنـه نـسـتـنـتـج مـا يـلـي :

$$ل_{ع}(س) = ل(س) \Leftrightarrow \frac{ل(س \cap ع)}{ل(ع)} = ل(س).$$

نجد $ل(س \cap ع) = ل(س) \times ل(ع)$.

7 – 4 نظريـة :

في فضاء احتمال منتهي $(\Omega ، ج(\Omega) ، ل)$ نقول أن الحادثين س وَع مستقلين إذا وفقط إذا كان :

$$ل(س \cap ع) = ل(س) \times ل(ع).$$

*** ملاحظات :**

1 – الحادث المستحيل وَحادث كيفي هما حادثان مستقلان وفي نفس الوقت هما غير متلائمان.

2 – كل حادثين يمكن أن يكونا :

– غير متلائمان وغير مستقلان.

– متلائمان وَغير مستقلان.

– غير متلائمان وَ مستقلان.

– متلائمان وَمستقلان.

8 – المتغير أو المتحول العشوائي الحقيقي.

في كل ما يأتي $(\Omega ، ج(\Omega) ، ل)$ فضاء احتمال منتهي مع $\Omega \neq \phi$.

ونفرض أن $\Omega = \{س_1 ، س_2 ، س_3 ، .... س_ن\}$

أي أصلي Ω يساوي ن.

8 – 1 تعريف :

كل تطبيق س من المجموعة Ω إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح نسميه متغيرًا أو متحولاً عشوائياً حقيقياً معرفاً على الفضاء $(\Omega ، ج(\Omega))$.

8 – 1 – 1 مثال :

نعتبر زهرتي نرد $ح_1$ و $ح_2$. نرمي هاتين الزهرتين في آن واحد ثم نقرأ الرقمين على الوجهين في الأعلى.

وَمنه مجموعة الإمكانياتΩ هي المربع الديكارتي للمجموعة { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } وبالتالي أصلي المجموعةΩ هو 36.

حيث الحادث البسيط منها متمثل في الحصول على الرقم هـ على ح $_1$

وَالرقم ن على ح $_2$ وَلنرمز له بالرمز $\{\omega_{\text{هـ، ن}}\}$.

وليكن التطبيق س من المجموعةΩ إلى ح والمعرف كما يلي :

س : $\Omega \rightarrow$ ح

$\omega_{\text{هـ. ن}} \mapsto$ هـ+ن أي س $(\omega_{\text{هـ، ن}})$ = هـ + ن.

هذا التطبيق هو متغير عشوائي حقيقي معرّف على $(\Omega$ ، ج$(\Omega))$.

فمثلا س$(\omega_{1،2})$ = 3 ، س$(\omega_{1،4})$ = 5 ، س $(\omega_{2،3})$ = 5 . إلخ . . .

*** ملاحظات :**

1 – يجب أن نفرق بين التطبيق المعرف من ج(Ω) إلى ح $_+$ وهو احتمال حيث ل[ج(Ω)]= [0 ، 1] وبين التطبيق س المعرف منΩ إلى ح ولنرمز لصورة المجموعة Ω وفق التطبيق س بالرمز س(Ω) وهي مجموعة جزئية من ح. ومنه كل عنصر من س(Ω) هو عدد حقيقي يمكن أن يكون موجبا أو سالبا أو معدوما.

2 – بما أن س تطبيق فإن لكل عنصر صورة على الأكثر وبالتالي يكون : أصلي [س (Ω)] $\leq$ أصلي س(Ω)

3 – من الملاحظتين 1 و 2 نستنتج أن :

س(Ω) = {س$(\omega_{\text{هـ}})$ / $\omega_{\text{هـ}} \ni \Omega$}

وليكن س(Ω)={α_1 ، α_2 ، α_3 ، ....، $\alpha_{\text{ك}}$ } حيث ك $\leq$ ن.

مع $\alpha_{\text{هـ}}$ عدد حقيقي من أجل كل هـ $\ni$ {1 ، ....، ك } .

4 – لتكن المجموعة{ $\omega_{\text{هـ}}$ /س $_{\text{هـ}} \ni \Omega$ وس$(\omega_{\text{هـ}})$=$\alpha_{\text{هـ}}$ }

هذه مجموعة جزئية منΩ فهي حادث من المجموعة ج (Ω) نرمز لها بالرمز {س = $\alpha_{\text{هـ}}$ } أي هي مجموعة العناصر التي لها نفس الصورة عن طريق التطبيق س وتسمى هذه المجموعة بالصورة العكسية للعنصر $\alpha_{\text{هـ}}$ عن طريق التطبيق س. أي س$^{-1}$({$\alpha_{\text{هـ}}$}) أو بالحادث المرفق بالعدد الحقيقي $\alpha_{\text{هـ}}$.

8 – 1 – 2 – تطبيق :

لتكن نفس فرضيات المثال (8–1–1) بحيث س هو المتغير العشوائي الحقيقي المعرف على $(\Omega$ ، ج$(\Omega))$. إذن س : $\Omega \leftarrow$ ج

$\omega_{هـ،ن} \longmapsto$ س $(\omega_{هـ،ن})$ = هـ + ن

1 – مثل جدوليًا المجموعة Ω^2.

2 – عين المجموعة س(Ω). ثم أوجد كل الحوادث المرفقة بنفس العدد α من س(Ω).

الحل :

1 –

ح1 / ح2	1	2	3	4	5	6
1	(1 ، 1)	(2 ، 1)	(3 ، 1)	(4 ، 1)	(5 ، 1)	(6 ، 1)
2	(1 ، 2)	(2 ، 2)	(3 ، 2)	(4 ، 2)	(5 ، 2)	(6 ، 2)
3	(1 ، 3)	(2 ، 3)	(3 ، 3)	(4 ، 3)	(5 ، 3)	(6 ، 3)
4	(1 ، 4)	(2 ، 4)	(3 ، 4)	(4 ، 4)	(5 ، 4)	(6 ، 4)
5	(1 ، 5)	(2 ، 5)	(3 ، 5)	(4 ، 5)	(5 ، 5)	(6 ، 5)
6	(1 ، 6)	(2 ، 6)	(3 ، 6)	(4 ، 6)	(5 ، 6)	(6 ، 6)

2 – مجموع الرقمين الظاهرين عند رمي الزهرتين هو عدد طبيعي محصور بين 2 وَ 12 ومنه :

س(Ω) = { 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 }.

بحيث مثلا : 3 = 1 + 2 أو 3 = 2 + 1.

أي س $(\omega_{1،2})$ = س $(\omega_{2،1})$ = 3

ح1 / ح2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

* الحوادث المرفقة بالعدد α =2 هي :{(1 ، 1)} ومن أجل α = 12 هي {(6 ، 6)}

* الحوادث المرفقة بالعدد α = 3 هي : {(2 ، 1) ، (1 ، 2)}.
*الحوادث المرفقة بالعدد α = 4 هي : {(3 ، 1) ، (2 ، 2) ، (1 ، 3)}.
* الحوادث المرفقة بالعدد α = 5 هي : {(1 ، 4) ، (2 ، 3) ، (3 ، 2) ،(4 ، 1)}.
* الحوادث المرفقة بالعددα = 6 هي : {(1 ، 5)،(2 ، 4)،(3 ، 3)،(4 ، 2)،(5 ، 1)}.
*الحوادث المرفقة بالعددα =7 هي:{(1،6)،(2،5)،(3 ،4)،(4 ، 3)،(5 ، 2)،(6 ، 1)}.
*الحوادث المرفقة بالعددα =8 هي:{(2 ، 6)،(3 ، 5)،(4 ، 4) ، (5 ، 3) ، (6 ، 2)}.
*الحوادث المرفقة بالعددα =9 هي:{(3 ، 6) ، (4 ، 5)، (5 ، 4) ، (6 ، 3)}.
*الحوادث المرفقة بالعددα =10 هي:{(4 ، 6) ، (5 ، 5)، (6 ، 4)}.
*الحوادث المرفقة بالعددα =11 هي:{(5 ، 6) ، (6 ، 5)}.

8 –2 قانون الإحتمال :

من خلال فرضيات ونتائج التطبيق (8–1–2) لدينا :

Ω^2 = {1 ، 2 ، 3 ، 4 ،5 ، 6 } × {1 ، 2 ، 3 ، 4 ،5 ، 6 } و$\left(\Omega ، ج(\Omega) ، ل\right)$ هو فضاء إحتمال منتهي. وَس متغير عشوائي حقيقي معرف على $\left(\Omega ، ج(\Omega)\right)$ علما أن كل حادث بسيط من ج(Ω) إحتماله $\frac{1}{36}$.

لدينا الحادث المرفق بالعدد 4 هو : { س = 4 } بحيث :

{س = 4 } = {(1 ، 3) ، (2، 2) ، (3 ،1) } أو بكتابة أخرى :

{س = 4 } = {(1 ، 3)} ∪ {(2، 2)} ∪ {(3 ،1)} =

$\{\omega_{1،3}\} \cup \{\omega_{2،2}\} \cup \{\omega_{3،1}\}$ . . (1)

نجد : س$\{\omega_{1،3}\}$ = س$\{\omega_{2،2}\}$ = س$\{\omega_{3،1}\}$ = 4

و بما أن ل $(\{\omega_{1،3}\})$ = ل$(\{\omega_{2،2}\})$ = ل$(\{\omega_{3،1}\})$ = $\frac{1}{36}$ لأن :

$\{\omega_{1،3}\}$ ، $\{\omega_{2،2}\}$ ، $\{\omega_{3،1}\}$ حوادث بسيطة من ج (Ω).

نستطيع تعريف إحتمال جديد φ على (س (Ω) ، ج [س (Ω)]) كما يلي :

لديـنا س (Ω) ={ 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 } و ج[س (Ω)] هو مجموعة أجزاء المجموعة س (Ω) أصلية 2^{11} لأن أصلي س (Ω) يساوي 11 و(φ) هو تطبيق من ج [س (Ω)] إلى $ح_+$ فمثلا { 4 } ∋ ج[س (Ω)]

نضع φ({4}) = ل({س=4})

نجد φ ({4}) = ل $(\{\omega_{1،3}\})$ ∪ $(\{\omega_{2،2}\})$ ∪ $(\{\omega_{3،1}\})$. . . (حسب(1))

= ل $(\{\omega_{1,3}\})$ + ل $(\{\omega_{2,2}\})$ + ل $(\{\omega_{3,1}\})$

لأن : $\{\omega_{1,3}\}$ ، $\{\omega_{2,2}\}$ ، $\{\omega_{3,1}\}$ حوادث بسيطة إذن غير متلائمة وكذلك ل إحتمال.

أخيرا $\varphi(\{4\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$ أي $\varphi(\{4\}) = \frac{1}{12}$.

بهذه الطريقة نستنتج أن : $\varphi(\{2\}) + \varphi(\{3\}) + ... + \varphi(\{12\}) = 1$

وكيفية حساب $\varphi(\{\alpha_{هـ}\})$ بدلالة ل $(\{\omega_{ن،هـ}\})$.

نستنتج أن φ هو احتمال على (س (Ω) ، ج [س (Ω)]) .

ونقول أن (س (Ω) ، ج [س (Ω)] ، φ] هو فضاء إحتمال منتهي.

إستنتاج :

ليكن (Ω ، ج (Ω) ، ل) فضاء إحتمال منتهي وَس متغير عشوائي حقيقي معرف على (Ω ، ج (Ω)). نسمي قانون إحتمال للمتغير س التطبيقφ من ج [س(Ω)] إلى المجال [0 ، 1] المعرف كما يلي :

φ : ج [س(Ω)] $\leftarrow$ [0، 1]

$\{\alpha\}$ $\leftarrow$ $\varphi(\{\alpha\})$ = ل [س$^{-1}(\{\alpha\})$]

حيث س$^{-1}(\{\alpha\})$ هو الحادث المرفق بالعدد الحقيقيα.

ملاحظة :

لتعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي س يكفي أن نعرّف لكل عنصر α من س (Ω) العدد الحقيقي ل $(\{\omega \in \Omega$ / س $(\Omega) = \alpha \})$.

ونرمز له بالرمز ل ({س =α}) أو ل (س = α) ونقول أن ل(س= α) هو الإحتمال الذي من أجله يأخذ المتغير العشوائي س القيمةα.

9 - الأمل الرياضي (أو القيمة المتوسطة) لمتغير عشوائي :

ليكن (Ω ، ج (Ω) ، ل) فضاء إحتمال منتهي وَس متغير عشوائي معرف على هذا الفضاء.

ونفرض أن س$(\Omega)=\{\alpha_1 ، \alpha_2 ، .... ، \alpha_{هـ} ، .... ، \alpha_{ن}\}$ وَ على الفضاء (س Ω ، ج [س (Ω)]) نعرّف قانون إحتمالφ بإعطاء ن عدداً حقيقياً س$_1$ ، س$_2$ ، .... ، س$_{ن}$ بحيث

س$_{هـ}$ = ل $(\{$ س = $\alpha_{هـ}\})$ وَ س$_1$ + س$_2$ + ... + س$_{ن}$ =1.

9 – 1 – تعريف :

نسمي الأمل الرياضي للمتغير العشوائي س العدد الحقيقي م المعرف كما يلي :   م = α_1 س$_1$ + α_2 س$_2$ + ... + $\alpha_{هـ}$ س$_{هـ}$ + $\alpha_{ن}$ س$_{ن}$ ونرمز لهذا المجموع بالرمز التالي : م = $\sum_{هـ=1}^{هـ=ن} \alpha_{هـ}$ س$_{هـ}$

9 – 2 – حساب الأمل الرياضي لمتغير عشوائي س :

أولاً : يجب تعريف صورة Ω عن طريق المتغير العشوائي س ولتكن س$(\Omega)=\{\alpha_1 ، \alpha_2 ، .... ، \alpha_{ن}\}$.

ثانياً : نعرّف الإحتمال φ من ج [س (Ω)] إلى [0 ، 1] ومنه نحسب الأعداد الحقيقية س$_{هـ}$ بحيث س$_{هـ}$ =ل$(\{$س = $\alpha_{هـ}\})$

مع : س$_1$ + س$_2$ + ... + س$_{ن}$ =1.

ثالثاً :

نضع الحسابات بالشكل التالي :

$\alpha_{هـ}$	س$_{هـ}$	$\alpha_{هـ}$ س$_{هـ}$
α_1	س$_1$	α_1 س$_1$
α_2	س$_2$	α_2 س$_2$
$\alpha_{ن}$	س$_{ن}$	$\alpha_{ن}$ س$_{ن}$
	م	α_1س$_1$ + α_2س$_2$ + ...+ $\alpha_{ن}$س$_{ن}$

9 – 3 – مثال : نضع في وعاء 7 قريصات غير متمايزة حيث إثنتين منها تحملان الرقم 1، ثلاثة تحمل الرقم 2 وَإثنتان تحملان الرقم 3. نسحب من الوعاء 3 قريصات في آن واحد.

1 – عين عدد الحالات الممكنة للسحب.

2 – نعرّف المتغير العشوائي س الذي يرفق بكل سحب مجموع أرقامه.

أ – أوجد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي س.

ب – أحسب الأمل الرياضي م للمتغير العشوائي س.

الحل :

1 – عدد الحالات الممكنة للسحب

لدينا 7 قريصات ونسحب منها 3 فكل إمكانية هي عبارة عن توفيقة وبالتالي نجد :

$$ق_7^3 = \frac{7\,!}{3!(7-3)!} = \frac{7\,!}{4\,!\,3\,!} = 35 \text{ إمكانية}$$

2 – أ / إيجاد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي س :

– البحث عن قيم المتغير العشوائي س(Ω) :

عندما نسحب 3 قريصات من بين 7 قريصات فإن النتائج التي ستظهر هي

<u>**الحالة الأولى**</u> : إما 3 قريصات مرقمة بالعدد 2 ومنه قيمة المتغير هي : 2 + 2 + 2 = 6.

إما قريصتان مرقمتان بالعدد 2 وَ واحدة بالرقم 1 ومنه قيمة المتغير هي : 2 + 2 + 1 = 5

إما قريصتان مرقمتان بالعدد 2 وَ واحدة بالرقم 3 ومنه قيمة المتغير هي : 2 + 2 + 3 = 7

<u>**الحالة الثانية**</u> : إما قريصة مرقمة بالعدد 2 وإثنتان من البقية نجد ثلاث حالات هي :

* إثنتان مرقمتان بالعدد 1 فتكون قيمة المتغير 2 + 1 + 1 = 4

أو * إثنتان مرقمتان بالعدد 3 فتكون قيمة المتغير 2 + 3 + 3 = 8

أو * إحداهما مرقمة بالعدد 1 وَالأخرى بالعدد 3 تكون قيمة المتغير هي 2 + 3 + 1 = 6.

<u>**الحالة الثالثة**</u> : إذا لم تظهر أي قريصة تحمل الرقم 2 وهما نميّز ما يلي :

إما إثنتان مرقمتان بالعدد 3 والثالثة بالعدد 1 نجد قيمة المتغير هي : 1 + 1 + 3 = 5

وإما إثنتان مرقمتان بالعدد 3 والثالثة بالعدد 1 نجد قيمة المتغير هي : 3 + 3 + 1 = 7

نستنتج أن س(Ω) = { 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 }.

* البحث عن الحادث المرفق بكل عدد من س(Ω) :

الحادث المرفق بالعدد 4 يتمثل فيما يأتي : " ظهور قريصتان تحملان الرقم 2 والثالثة تحمل الرقم 2 " وَمنه عدد الحالات المواتية هو : $ق_{2}^{2} \times ق_{3}^{1}=3$ وإحتماله هو $\frac{3}{35}$

الحادث المرفق بالعدد 5 يتمثل فيما يلي : "ظهور قريصتان تحملان الرقم 2 والثالثة الرقم 1 أو إثنتان تحملان الرقم 1 والثالثة الرقم 3" ومنه عدد الحالات المواتية هو $ق_{2}^{1} \times ق_{3}^{2} + ق_{2}^{2} \times ق_{2}^{1}=8$ واحتماله هو $\frac{8}{35}$

الحادث المرفق بالعدد 6 هو : " ظهور (ثلاث قريصات تحمل الرقم 3) أو (واحدة الرقم 1 وَواحدة الرقم 3 وَواحدة الرقم 2) " وَمنه عدد الحالات المواتية هو :

$ق_{3}^{3} \times ق_{2}^{1} + ق_{3}^{1} \times ق_{2}^{1} = 13$ واحتماله هو $\frac{13}{35}$.

الحادث المرفق بالعدد 7 هو : " ظهور إثنتان تحملان الرقم 2 والثالثة الرقم 3 أو إثنتان تحملان الرقم 3 وَواحدة الرقم 1 وَمنه عدد الحالات المواتية هو :

$ق_{3}^{2} \times ق_{2}^{1} + ق_{2}^{2} \times ق_{2}^{1} = 8$ وإحتماله هو $\frac{8}{35}$.

الحادث المرفق بالعدد 8 هو : " ظهور إثنتان تحملان الرقم 3 والثالثة الرقم 2 " وَعدد حالاته المواتية هو : $ق_{2}^{2} \times ق_{3}^{1} = 3$ وإحتماله هو $\frac{3}{35}$.

فيكون قانون الإحتمال كما يلي :

$\{\alpha_{هـ}\}$	{4}	{5}	{6}	{7}	{8}
$\varphi(\{\alpha_{هـ}\})$	$\frac{3}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{13}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{3}{35}$

ب – حساب الأمل الرياضي :

$\alpha_{هـ}$	س $_{هـ}$	$\alpha_{هـ}$ س $_{هـ}$
4	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$
5	$\frac{8}{35}$	$\frac{40}{35}$
6	$\frac{13}{35}$	$\frac{78}{35}$
7	$\frac{8}{35}$	$\frac{56}{35}$
8	$\frac{3}{35}$	$\frac{24}{35}$
	م	$\frac{12}{35}+\frac{40}{35}+\frac{78}{35}+\frac{56}{35}+\frac{24}{35}= 6$

إذن م = 6

10 – تمارين التصحيح الذاتي :

10 – 1 – نرمي قطعة نقود مرتين متتاليتين وليكن الحادثين :

س : " الحصول على الوجه الذي يحمل الشعار في الرمية الأولى".

ع : " الحصول على الوجه الذي يحمل الرقم في الرمتين المتتاليتين".

1 – أحسب إحتمالات كل من الحوادث التالية : س ، ع وَ س ∩ ع

2 – أحسب إحتمال الحصول على الأقل مرة على الوجه الذي يحمل الرقم بحيث نتيجة الرمية الأولى هي الوجه الذي يحمل الشعار.

3 – نرمز بالرمز ل (ع / س) لإحتمال الحادث ع علماً أن الحادث س قد وقع ثم تحقق أن : ل(ع / س) = $\frac{\text{ل(س ∩ ع)}}{\text{ل(س)}}$.

وأحسب ل (س/ع) إحتمال الحادث س علماً أن الحادث ع قد وقع.

10– 2 – علبة تحتوي على 10 ورقات من ورق لعب، 5 من نوع الآس (AS) وَ 3 ملك وَ 2 أميرة. سحب الآس يقابله 5 نقاط وسحب الملك تقابله نقطتان وَ سحب الأميرة تقابله نقطة واحدة.

نسحب من العلبة ورقتين في آن واحد وليكن س المتحول العشوائي الحقيقي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقط.

1 – ما هو قانون إحتمال المتغير العشوائي س ؟

2 – أحسب الأمل الرياضي.

10 – 3 يحوي كيس 12 كرة متجانسة ومختلفة اللون منها : 5 بيضاء ، 4 حمراء ، 3 خضراء. نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد وبطريقة عشوائية. أحسب إحتمال الحوادث التالية :

$س_1$: " أن تكون الكرات الثلاث من لون واحد ".

$س_2$: " أن تكون 2 بيضاء وَ واحدة حمراء ".

$س_3$: " الحصول على الأقل على كرة خضراء ".

$س_4$: " الحصول على اللونين فقط الأبيض والأحمر ".

11 – الأجوبة :

11 –1 – (1) مجموعة الإمكانياتΩ هي عبارة عن المربع الديكارتي للمجموعة {ط ، ر} ومنهΩ = { ط ، ر} × {ط ، ر} إذن : Ω = { (ط ،ط) ، (ط ، ر) ،(ر ، ر) ، (ر، ط)}

وبالتالي أصلي Ω هو 4

أي صـ (Ω) = 4

حيث إحتمال كل حادث بسيط هو $\frac{1}{4}$.

* حساب إحتمال الحادث س :

لدينا س = {(ط ، ر) ،(ط ، ط)} نجد ل (س) = $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

* حساب إحتمال الحادث ع :

لدينا ع = {(ر ، ر) ،(ر ، ط) ، (ط ، ر)} نجد صـ (ع) = 3 ومنه ل (ع) = $\frac{3}{4}$

* حساب إحتمال الحادث س ∩ ع :

نلاحظ أن س ∩ ع = {(ط ، ر)} إذن ل(س ∩ ع) = $\frac{1}{4}$.

(2) نتيجة الرمية الأولى هي الوجه ر ومنه الحصول على الوجه الذي يحمل ط هو الحصول على الوجه ط في الرمية الثانية. نستنتج مجموعة الإمكانيات المرفقة بهذا الإختبار المتعلق برمي القطعة للمرة الثانية هي :

Ω' = {ط ، ر}. ومنه على المجموعة Ω' نعرف إحتمالاً جديداً لَ كما يلي : لَ ({ر}) = $\frac{1}{2}$ وَ لَ ({ط}) = $\frac{1}{2}$ نستنتج أن :

بعد ظهور الوجه ر هو لَ ({ط}) = $\frac{1}{2}$. وهو عبارة عن الإحتمال الشرطي للحادث ع بعد وقوع الحادث س ولنرمز له بالرمز ل (ع/س) وَنكتب : ل (ع / س)= $\frac{1}{2}$

(3) التحقيق : ل (ع / س) = $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. لأن ل (س ∩ ع) = $\frac{1}{2}$ وَ ل (س) = $\frac{1}{2}$

* حساب ل (س / ع) :

نفرض أن ع قد وقع هذا يقودنا إلى إعتبار مجموعة الإمكانيات الجديدة :

Ω'' = {(ر ، ر) ،(ر ، ط) ، (ط ، ر)} ونعرف على Ω'' الإحتمال لً كما يلي : لً ({(ر ، ر)}) = لً ({(ر ، ط)}) = لً ({(ط ، ر)}) = $\frac{1}{3}$.

وَمنه لً {(ط ، ر)} هو إحتمال الحصول على الوجه ر في الرمية الأولى علماً أننا تحصلنا في رمتين متتاليتين على الأقل على الوجه ر. وَ لهذا نرمز له ل (س/ع) وَنستنتج أن لً {(ط ، ر)} = ل (س/ع) = $\frac{1}{3}$.

11 – 2 (1) لدينا عدد الحالات الممكنة للسحب هي : $ق_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = 45$ إمكانية.

*البحث عن قيم المتغير العشوائي س ولتكن س (Ω)

نرمز لورقة آس بالرمز AS وَ لورقة ملك بالرمز كـ ولورقة أميرة بالرمز T إذن بما أننا نسحب ورقتين من بين 10 أوراق وَ ثلاثة أنواع فإن الحالات التي ستظهر هي :

ω_1 = (AS ، AS) ، ω_2 = (AS ، م) ، ω_3 = (AS ، T)

ω_4 (م ، م) ، ω_5 = (م ، T) ، ω_6 = (T ، T).

بوضع $\Omega = \{\omega_1 ، \omega_2 ، \omega_3 ، \omega_4 ، \omega_5 ، \omega_6\}$ ثم نعرف قيم المتغير العشوائي س من $\Omega \to$ ح.

لدينا : $\varphi(\omega_1) = 10$ لأنه يظهر AS مرتين ولكل AS نجد 5 نقط.

$\varphi(\omega_2) = 7$ لأنه يظهر AS يقابله 5 نقط وملك يقابله نقطتين.

$\varphi(\omega_3) = 6$ لأنه يظهر AS يقابله 5 نقط و T يقابله نقطة.

$\varphi(\omega_4) = 4$ لأنه يظهر ك مرتين يقابله نقطتان لكل ك.

$\varphi(\omega_5) = 3$ لأنه يظهر م يقابله نقطتان و 'T تقابله نقطة.

$\varphi(\omega_6) = 2$ لأنه يظهر T مرتين تقابله نقطة لكل T.

ومنه س(Ω) = { 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 7 ، 10}

لدينا الحادث المرفق بالعدد 10 هو $\{\omega_1\}$ حيث ل$(\{\omega_1\}) = \frac{ق_5^2}{45} = \frac{10}{45}$

لدينا الحادث المرفق بالعدد 7 هو $\{\omega_2\}$ حيث ل$(\{\omega_2\}) = \frac{ق_5^1 \times ق_3^1}{45} = \frac{15}{45}$

لدينا الحادث المرفق بالعدد 6 هو $\{\omega_3\}$ حيث ل$(\{\omega_3\}) = \frac{ق_5^1 \times ق_2^1}{45} = \frac{10}{45}$

لدينا الحادث المرفق بالعدد 4 هو $\{\omega_4\}$ حيث ل$(\{\omega_4\}) = \frac{ق_3^2}{45} = \frac{3}{45}$.

لدينا الحادث المرفق بالعدد 3 هو $\{\omega_5\}$ حيث ل$(\{\omega_5\}) = \frac{ق_3^1 \times ق_2^1}{45} = \frac{6}{45}$.

لدينا الحادث المرفق بالعدد 2 هو $\{\omega_6\}$ حيث ل$(\{\omega_6\}) = \frac{ق_2^2}{45} = \frac{1}{45}$.

نجد الجدول التالي :

$\{\alpha_{هـ}\}$	{10}	{7}	{6}	{4}	{3}	{2}
$\varphi(\{\alpha_{هـ}\})$	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$

2- حساب الأمل الرياضي :

$\alpha_{هـ}$	$س_{هـ}$	$\alpha_{هـ} س_{هـ}$
10	$\frac{10}{45}$	$\frac{100}{45}$
7	$\frac{15}{45}$	$\frac{105}{45}$
6	$\frac{10}{45}$	$\frac{60}{45}$
4	$\frac{3}{45}$	$\frac{12}{45}$
3	$\frac{6}{45}$	$\frac{18}{45}$
2	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$
	م	$\frac{100}{45}+\frac{105}{45}+\frac{60}{45}+\frac{12}{45}+\frac{18}{45}+\frac{2}{45}=\frac{297}{45}$

نجد $م = \frac{99}{15}$.

مـبـادئ الإحـصـاء الـوصـفـي

الـهـدف من الـدرس : تعريف الـمفـردات الـمسـتـعـمـلـة فـي الإحـصـاء وكـيـفـيـة إنـشـاء التمـثـيـلات الـبـيـانـيـة الـمخـتـلـفـة.

الـمـدّة الـلازمة لـدراسـتــه : 10 سـاعـات.

تـصـمـيـم الـدرس

1 -عـمـومـيـات.

2 - الـتـمـثـيـلات الـبـيـانـيـة الـمـخـتـلـفـة.

3 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.

4 - الأجـوبـة.

1 - عمـومـيـات :

إذا أردنـا مـعرفـة عمـر كـل تـلـميـذ مسـجّـل فـي الـمـركـز الـوطـنـي لـتـعـمـيـم الـتـعـلـيـم فإنـنـا نـحـصـل عـلـى سلسلـة من الأعـداد يـمـكـن أن نـرتّـبـهـا فـي جـدول يـسـمـى جـدولا إحـصـائـيًـا.

1 -1 - الـمجـتـمـع الإحـصـائـي-الـوحـدة الإحـصائية - الـعيّـنـة .

الـمجـتـمـع الإحـصـائـي هـو الـمجـمـوعـة الـتـي تـجـري عـلـيـهـا الـمـشـاهـدات. كـل عـنـصـر مـن الـمجـتـمـع الإحـصـائـي يـسمـى وحـدة إحـصـائـيـة.

* إذا كـان عـدد عـنـاصـر الـمـجـتـمـع الإحـصـائـي كـبـيـراً جـداً فـإنـه تـجـرى الـمـشـاهـدات عـلـى مـجـمـوعـة جـزئـيـة مـنـه تـسـمـى الـعيّـنـة.

1 - 2 الـطـبـع الإحـصـائـي.

الـطـبـع الإحـصـائـي هـو الـخـاصـة لـمـجـتـمـع إحـصـائـي الـتـي نـدرسـهـا. فـي مـثـال الـمـقـدّمـة، الـطـبـع الـمـدروس هـو : " عـمـر تـلـمـيـذ "

طـبـع إحـصـائـي يـمـكـن أن يـكـون طـبـعًـا نـوعـيًّـا أو طـبـعًـا كـمـيًّـا.

* يـكـون الـطـبـع الإحـصـائـي نـوعـيـاً إذا لـم تـرفـق بـه قـيـمـة عـدديـة (مـثـلا، نـوعـيـة قـطـعـة مـصـنّـعـة فـي مـعـمـل - صـالـحـة أم غـيـر صـالـحـة - هـي طـبـع نـوعـيّ).

* يـكـون الـطـبـع الإحـصـائـي كـمـيًّـا إذا أمـكـن قـيـاسـه (مـثـلا، عـمـر إنـسـان هـو طـبـع كـمّـي).

الـطـبـع الـكـمـي يـمـكـن أن يـكـون مـتـقـطـعًـا أو مـسـتـمـراً.

* يـكـون الـطـبـع الـكـمّـي مـتـقـطـعًـا إذا أخـذ قـيـمـا مـنـعـزلـة صـحـيـحـة (مـثـلا، عـدد أفـراد أسـرة).

* يـكـون الـطـبـع الـكـمـي مـسـتـمـرا إذا أخـذ كـل قـيـم مـن مـجـال مـعـطـى (مـثـلا، كـل الـقـيـاسـات الـتـي تـخـص الـطـول والـوزن والـوقـت).

1 - 3 أمـثـلـة :

* سـلـسـلـة ذات طـبـع نـوعـي

- الـمـجـتـمـع الإحـصـائـي : 100 قـطـعـة مـصـنـعـة فـي مـعـمـل .

- الـطـبـع الإحـصـائـي : نـوعـيـة قـطـعـة (صـالـحـة أم غـيـر صـالـحـة).

الـقـطـع	صـالـحـة	غـيـر صـالـحـة
عـدد الـقـطـع	94	6

* سـلـسـلـة ذات طـبـع كـمـي مـتـقـطـع.

- المجتمع الإحصائي : 36 تلميذ السنة
الثانية ثانوي من ثانوية ما.
- الطبع الإحصائي : عمر (أو سنّ) كل تلميذ.

العمر	15	16	17	18
عدد التلاميذ	1	12	21	2

* سلسلة ذات طبع كمي مستمر.
- المجتمع الإحصائي : 36 تلميذ السنة الثانية ثانوي من ثانوية ما.
- الطبع الإحصائي : طول قامة كل تلميذ بالسنتيمترات

طول القامة	[140،150[	[150،160[	[160،170[	[170،180[	[180،190[
عدد التلاميذ	2	7	5	17	5

1 - 4 - التوزيع التكرار :

* في المثال 2، الجدول يرفق بكل قيمة س ـهـ للطبع العدد ن ـهـ (ن ـهـ هو عدد مرات حدوث س ـهـ).
ن ـهـ يسمى تكرار س ـهـ وكل النتائج المحصل عليها تسمى التوزيع التكراري.
* في المثال 3، الجدول يرفق بكل مجال (نسمّيه فئة) تكراره ن ـهـ .

تعاريف خاصة بالفئة.

لنعتبر الفئة [أ ، ب [.
- حدّا الفئة هما العدادان أ ، ب
- مدى الفئة هو العدد ب - أ.
ويسمى في بعض الأحيان " اتساع الفئة " أو " طول الفئة "
- مركز الفئة هو العدد $\frac{أ + ب}{2}$

مثلا :

لنعتبر الفئة [160، 170 [
حدّا الفئة هما العددان 160، 170
مدى الفئة هو 10.

مركز الفئة هو 165

1-5 - التوزيع التكراري المتجمع.

* التوزيع التكراري المتجمع الصاعد.

إنطلاقاً من جدول التوزيع التكراري للمثال 3، يمكن أن ننشئ الجدول التالي :

طول القامة	150 >	160 >	170 >	180 >	190 >
عدد التلاميذ (التكرارات)	2	9 =7+2	14 =5 + 9	31=17+14	36 = 5 + 31

هذا الجدول يسمى جدول التوزيع التكراري المجتمع الصاعد.

* التوزيع التكراري المتجمع النازل.

إنطلاقا من جدول التوزيع التكراري للمثال 3، يمكن أن ننشئ الجدول التالي

طول القامة	140 ≤	150 ≤	160 ≤	170 ≤	180 ≤
عدد التلاميذ (التكرارات)	36	34 =2-36	27 =7- 34	22=5-27	5 = 17-22

هذا الجدول يسمّى جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل.

2 - التمثيلات البيانية المختلفة.:

في كل الحالات، المعلم متعامد.

2 - 1 - الطبع متقطع :

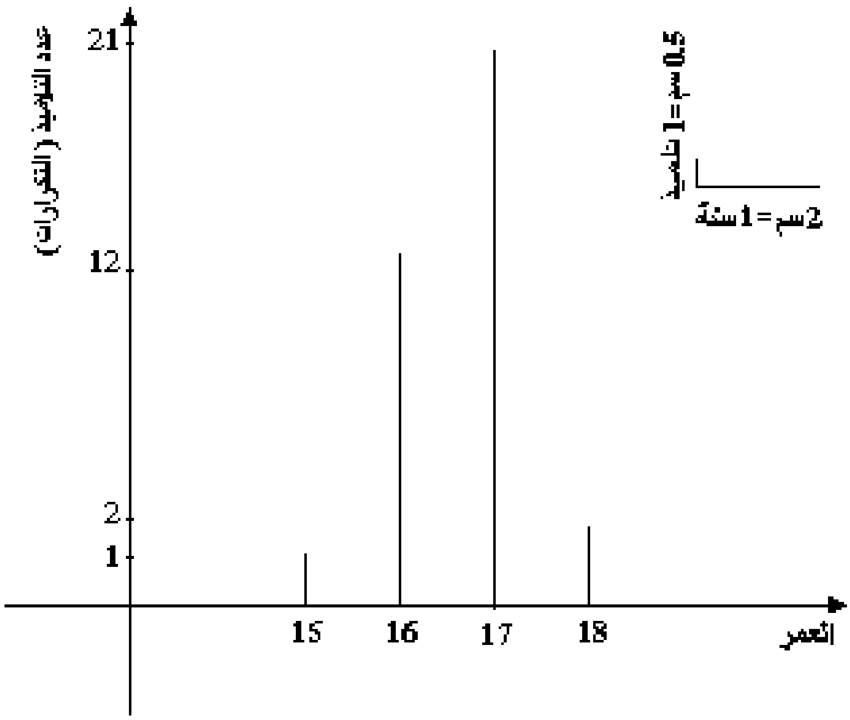
* لنعتبر المثال 2 (الفقرة 1-3).

نفرض أن فاصلة م على محور الفواصل هي 14 وأن وحدة الطول على هذا المحور هي 2 سم ونفرض أن وحدة الطول على محور التراتيب هي 0.5 سم.

ننشئ النقط أ (15، 0)، ب (16، 0)، جـ (17، 0)، د (18، 0).

ثم النقط أَ (15، 1)، بَ (16، 12)، جـَ (17، 21)، (18، 2).

ننشئ القطعة المستقيمة [أأَ]، [ب بَ]، [جـ جـَ]، [د دَ].



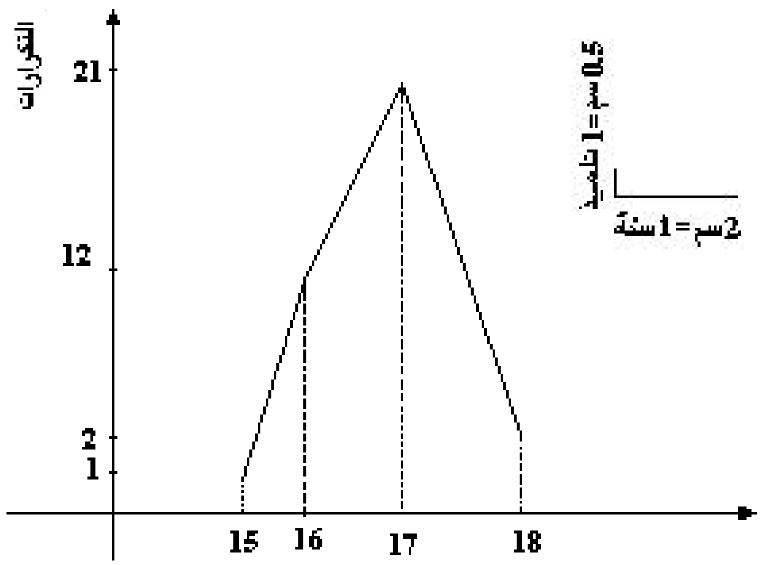
مجموعة القطع المستقيمة المحصل عليها تشكل تمثيلا بيانيا للتوزيع التكراري. يسمى هذا التمثيل الأعمدة التكرارية.

* نعرف فيما يلي تمثيلا بيانيا آخر لنفس التوزيع التكراري.

نختار معلما مثل المعلم السابق.

نشئ النقط أَ (15، 1)، بَ (16، 12)، جَ (17، 21)، دَ (18، 2).

نشئ الخط المضلّعي أَ بَ جَ دَ.



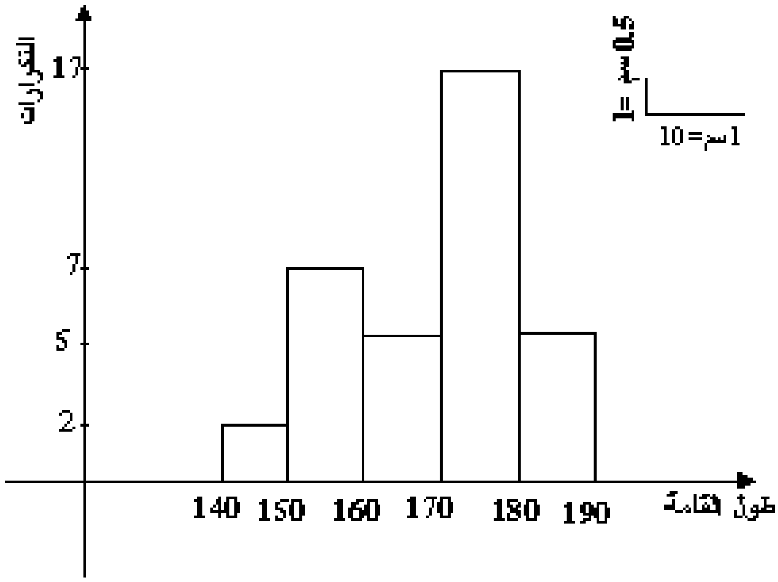
الخط المضلّعي المحصل عليه يشكّل تمثيلا بيانيا للتوزيع التكراري. يسمى هذا التمثيل المضلع التكراري للتوزيع.

2 – 2 – الطبع مستمر.

* لنعتبر المثال 3 (الفقرة 1 – 3). نفرض أن فاصلة م على محور الفواصل هي 100 وأن وحدة الطول على هذا المحور هي 1سم ونفرض أن وحدة الطول على محور التراتيب هي 0.5 سم.

على محور الفواصل، ننشئ النقط ذات الفواصل :140، 150، 160، 170، 180، 190.

ننشئ مستطيلات قاعدة كل واحد منها يساوي مدى فئة وارتفاعه يساوي تكراره هذه الفئة.



مجموعة المستطيلات المحصل عليها تشكل تمثيلا بيانيا للتوزيع التكراري. يسمى هذا التمثيل المدرج التكراري للتوزيع.

* نعرّف فيما يلي تمثيلا بيانيا آخر لنفس التوزيع التكراري.

نختار معلما مثل الملم السابق.

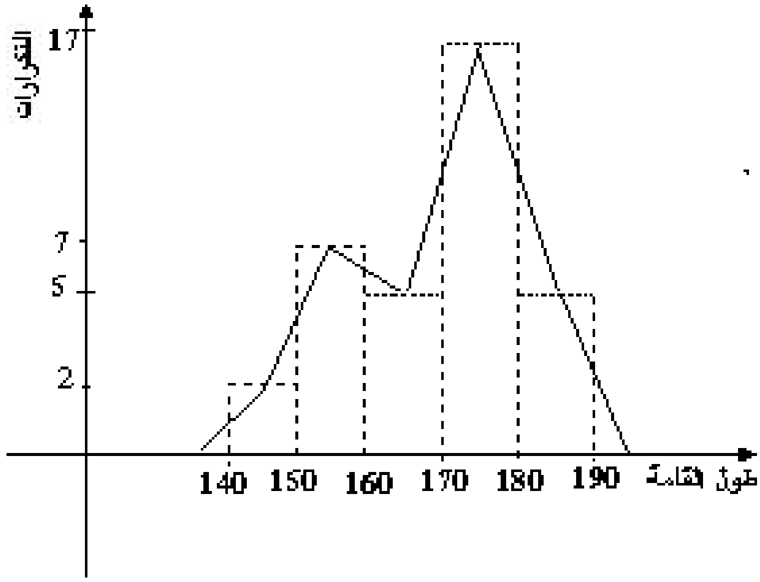
فئات التوزيع التكراري هي :[140، 150[،[150، 160[،[160، 170[،[170،180[،[180،190[.

مراكز هذه الفئات هي : 145، 155، 165، 175، 185.

ننشئ النقط :أ(145، 2)، ب(155، 7)،جـ (165، 5)، د(175، 17)، هـ (185، 5).

ثم ننشئ النقطتين : و(135، 0)، ي (185، 0) (حيث 135 هو مركز الفئة ما قبل الفئة الأولى للتوزيع وَ 195 مركز الفئة ما بعد الفئة الأخيرة للتوزيع).

ننشئ الخط المضلّعي و أ ب جـ د هـ ي.



يسمى الخط المضلعي المحصل عليه المضلّع التكراري للتوزيع.

ملاحظة :

نستطيع أن نستنتج المضلع التكراري من المدرج التكراري لأن النقط أ ب جـ د هـ هي منتصفات القاعدات العليا لمستطيلات المدرج التكراري.

3-2 المضلّع التكراري المتجمّع.

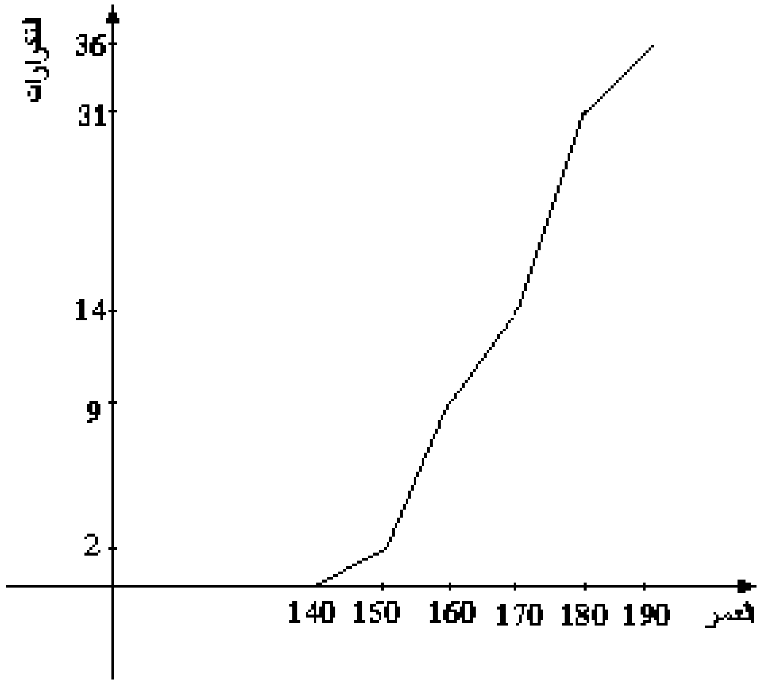
* المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

نستعمل الجدول الأول للفقرة 1-5.

نختار المعلم كالآتي : على محور الفواصل ، فاصلة م هي 100 و 1 سم يمثل 10.

على محور التراتيب، 1 سم يمثل 4.

ننشئ النقط : و (140، 0)،أ (150، 2)، ب (160، 9)، جـ (170، 14)، د(180، 31)، هـ (190، 36). ننشئ الخط المضلّعي و أ ب جـ د هـ.



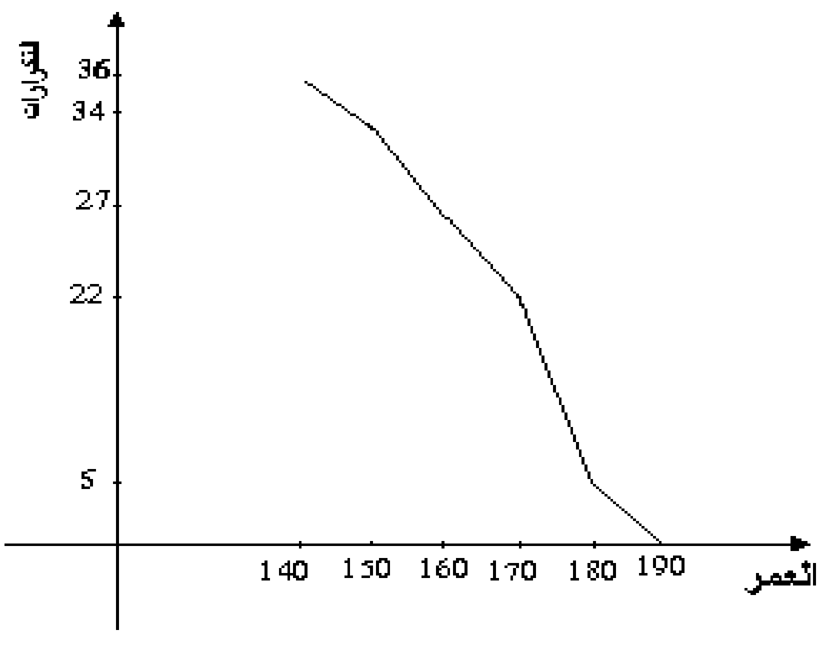
يسمى الخط المضلّعي المحصل عليه **المضلّع التكراري الصاعد للتوزيع.**

*المضلّع التكراري المتجمّع النازل : نستعمل الجدول الثاني للفقرة 1 – 5.

نستعمل الجدول الثاني للفقرة 1 – 5

نختار معلما مثل المعلم السابق. ننشيء النقط :أ (140، 36)، ب (150، 34)، جـ (160 ، 27) ، د(170، 22)، هـ(180، 5)، ي(190، 0).

ننشئ الخط المضلّعيأ ب جـ د هـ ي.



الخط المضلّعي المحصل عليه يسمّي **المضلع التكراري المتجمّع النازل.**

3- تمارين التصحيح الذاتي :

3 -1 - بعد إختبار في الرياضيات، العلامات (النقط) المحصل عليها من طرف تلاميذ مركز إمتحان موزعة في الجدول التالي :

العلامات	التكرارات $\text{ن}_{\text{هـ}}$	مراكز الفئات $\text{س}_{\text{هـ}}$	$\text{ن}_{\text{هـ}} . \text{س}_{\text{هـ}}$
] 0 ، 4]	12		
] ،]		6	90
] ،]	20	9	
] 10، 12]			187
] ،]	10	14	
] 16، 20]	7	18	126
	$\sum \text{ن}_{\text{هـ}} =$		$\sum \text{ن}_{\text{هـ}} \text{س}_{\text{هـ}} = 747$

أكمل هذا الجدول.

ملاحظات :

1) الرمز $\sum \text{ن}_{\text{هـ}}$ يدل على المجموع :

$$\text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \text{ن}_3 + \text{ن}_4 + \text{ن}_5 + \text{ن}_6$$

والرمز $\sum \text{ن}_{\text{هـ}} \text{س}_{\text{هـ}}$ يدل على المجموع :

$$\text{ن}_1\text{س}_1 + \text{ن}_2\text{س}_2 + \text{ن}_3\text{س}_3 + \text{ن}_4\text{س}_4 + \text{ن}_5\text{س}_5 + \text{ن}_6\text{س}_6$$

2) لاحظ أن التوزيع التكراري السابق له فئات غير متساوية المدى.

3-2 سُئل 40 شخصًا عن عدد الكتب التي يقرأها كل واحد منهم في سنة. فالنتائج كانت كما يلي :

15، 24، 31، 30، 27، 2، 1، 4، 1، 1، 7، 18، 18، 17، 39، 37، 34، 28، 21، 14، 13، 21، 17، 13، 8، 18، 11، 13، 3، 4، 1، 2، 21، 13،37، 2،1،7،39، 15.

1 - رتّب هذه النتائج ترتيبا تصاعديا.

2 – قدّم هذه النتائج في جدول توزيع تكراري ذي فئات متساوية المدى (الفئة الأولى هي [0، 5 [ ).

3 – أنشئ، في نفس المعلم، المدرج التكراري والمضلّع التكراري.

4 – أنشئ، في نفس المعلم، المضلّع التكراري المتجمع الصاعد والمضلّع التكراري المتجمع النّازل.

4 – الأجوبة :

4 – 1 حل التمرين 3–1 :

العلامات	التكرارات $ن_هـ$	مراكز الفئات $س_هـ$	$ن_هـ . س_هـ$
[0 ، 4 [	12	2	24
[4 ، 8 [	15	6	90
[8 ، 10 [	20	9	180
[10، 12 [	17	11	187
[12، 16 [	10	14	140
[16، 20 [	7	18	126
	$\sum ن_هـ = 81$		$\sum ن_هـ . س_هـ = 747$

4 – 2 – حل التمرين 3 – 2 :

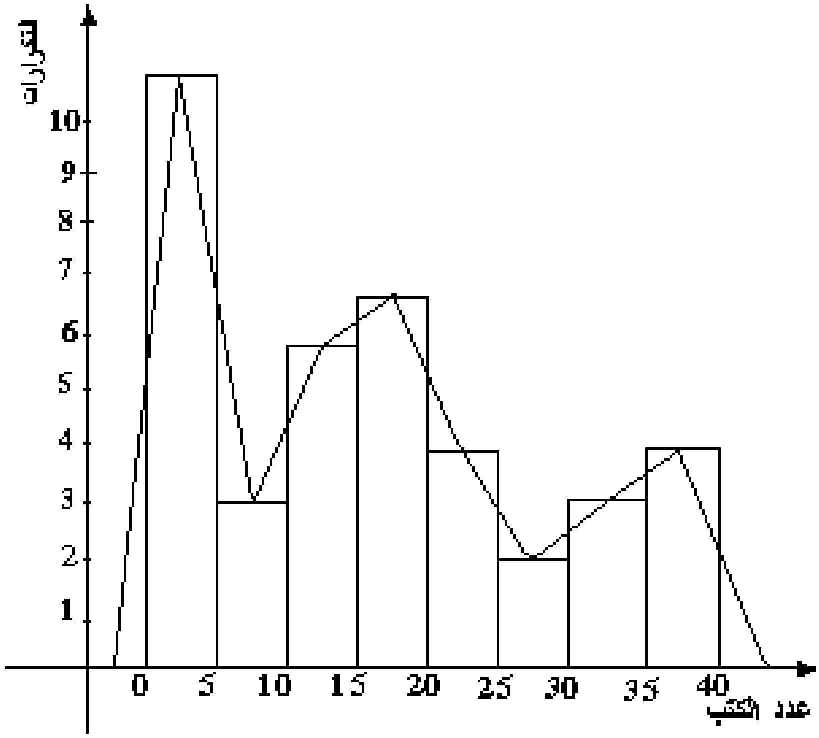
1 – ترتيب النتائج ترتيبا تصاعديا.

1، 1، 1، 1، 1، 1، 2، 2، 2، 2، 3، 4، 4، 7، 7، 8، 11، 13، 13، 13، 13، 14، 15، 15، 17، 17، 18، 18، 18، 21، 21، 21، 24، 27، 28، 30، 31، 34، 37، 37، 39، 39.

2 – إنشاء جدول التوزيع التكراري.

عدد الكتب	[0،5[	[5،10[	[10،15[	[15،20[	[20،25[	[25،30[	[30،35[	[5،40[
التكرارات	11	3	6	7	4	2	3	4

3 – إنشاء المدرج التكراري والمضلع التكراري :



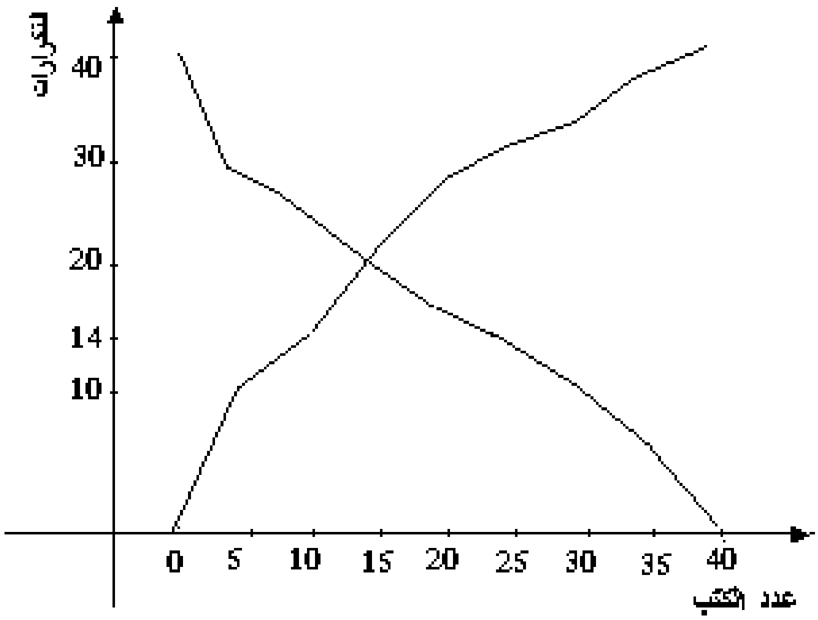
4 - إنشاء المضلّع التكراري المتجمّع الصاعد والمضلّع التكراري المتجمع النازل.

جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد :

عدد الكتب	5 >	10 >	15 >	20 >	25 >	30 >	35 >	40 >
التكرارات	11	14	20	27	31	33	36	40

جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل :

عدد الكتب	0 ≤	5 ≤	10 ≤	15 ≤	20 ≤	25 ≤	30 ≤	35 ≤
التكرارات	40	29	26	20	13	09	07	04


التكرارات
40
30
20
14
10
0
5
10
15
20
25
30
35
40
عدد الكتب

مميّزات سلسلة إحصائية

خاص بشعبة علوم طبيعية والحياة فقط.

الهدف من الدرس : تعريف أعداد تميّز سلسلة إحصائية.

المدّة اللازمة لدراسته : 8 ساعات.

الدروس التي ينبغي مراجعتها : مبادئ الإحصاء الوصفي.

تصميم الدرس

1 – مقاييس النزعة المركزية (الموقع)..

2 – مقاييس التشتت.

3 – تمارين التصحيح الذاتي.

4 – الأجوبة.

1 - مقاييس النزعة المركزية (الموقع).

1 - 1 الوسط الحسابي.

*** في حالة طبع متقطع.**

لنعتبر السلسلة الإحصائية :

قيم الطبع : $س_1$ $س_2$ $س_ك$

التكرارات : $ن_1$ $ن_2$ $ن_ك$

لنضع : $ن_1 + ن_2 + \ldots + ن_ك = ن$

أي : $\sum_{هـ=1}^{هـ=ك} ن_هـ = ن$

الوسط الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية هو العدد :

$$\frac{ن_1 س_1 + ن_2 س_2 + \ldots + ن_ك س_ك}{ن}$$

نرمز للوسط الحسابي بالرمز : $\overline{س}$.

إذن، لدينا : $\overline{س} = \frac{1}{ن} \sum_{هـ=1}^{هـ=ك} ن_هـ . س_هـ$

مثال 1 :

(أنظر إلى المثال الثاني للفقرة 1-3 من الدرس السابق).

العمر $س_هـ$	التكرارات $ن_هـ$	$ن_هـ . س_هـ$
15	1	15
16	12	192
17	21	357
18	2	36
	$\sum ن_هـ = 36$	$\sum ن_هـ . س_هـ = 600$

الوسط الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية هو العدد $\overline{س}$ حيث :

$$\overline{س} = \frac{600}{36}$$

$$\overline{س} = \frac{50}{3}$$

$$= \frac{48}{3} + \frac{2}{3}$$

$= 16$ سنة + $\frac{2}{3}$ سنة

$\overline{س} = 16$ سنة وَ 8 أشهر.

*** في حالة طبع مستمر.**

نطبق التعريف السابق ولكن $س_1$، $س_2$، . . . $س_ك$

تمثل مراكز الفئات.

مثال 2 :

(أنظر إلى المثال الثالث للفقرة 1−3 من الدرس السّابق)

الفئات	مراكز الفئات $س_هـ$	التكرارات $ن_هـ$	$ن_هـ . س_هـ$
]140،150]	145	2	290
]150،160]	155	7	1085
]160،170]	165	5	825
]170،180]	175	17	2975
]180،190]	185	5	925
		$\sum ن_هـ = 36$	$\sum ن_هـ . س_هـ = 6100$

الوسط الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية هو العدد $\overline{س}$ حيث : $\overline{س} = \frac{6100}{36}$

$\overline{س} = \frac{1525}{9}$ أي $\overline{س} \simeq 169,4$ سم

*** الحساب المبسّط للوسط الحسابي.**

لنختار متغيّرًا آخر $ص_هـ$ بحيث : $ص_هـ = أ\, س_هـ + ب$

حيث أ ، ب عددان حقيقيان ثابتان وَ $أ \neq 0$.

هذا يؤدي إلى تعريف سلسلة إحصائية أخرى هي :

قيّم الطبع : $أ\, س_1 + ب$ ، $أ\, س_2 + ب$ ، ... ، $أ\, س_ك + ب$.

التكرارات : $ن_1$ ، $ن_2$ ، . . . $ن_ك$

إذا كان $\overline{ص}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة فإننا نبرهن أن : $\overline{ص} = أ\, \overline{س} + ب$

التطبيق العملي لهذه الخاصة :

نختار أ ، ب بحيث يكون حساب الأعداد :

$ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ك$ الأسهل الممكن.

ثم نحسب الوسط الحسابي $\overline{ص}$، فنستنتج $\overline{س}$ لأن :

$$\overline{س} = \frac{1}{أ} \overline{ص} - \frac{ب}{أ}$$

مثال :

لنعتبر المثال 2 السابق.

مركز الفئة الوسطي هو : 165.

إذا إخترنا متغيّراً $ص'_هـ$ بحيث : $ص'_هـ = س_هـ - 165$

فإننا نلاحظ أن الأعداد : $س_1 - 165$، $س_2 - 165$ ، .... تقبل القسمة على 10. هذا يؤدي إلى إختيار المتغيّر $ص_هـ$ كما يلي : $ص_هـ = \frac{س_هـ - 165}{10}$.

فالحسابات ملخّصة في الجدول التالي :

الفئات	مركز الفئات $س_هـ$	التكرارات $ن_هـ$	$ص_هـ = \frac{س_هـ - 165}{10}$	$ن_هـ . ص_هـ$
[140،150[	145	2	−2	−4
[150،160[	155	7	−1	−7
[160،170[	165	5	0	0
[170،180[	175	17	1	17
[180،190[	185	5	2	10
		$\sum ن_هـ = 36$		$\sum ن_هـ . ص_هـ = 16$

نستنتج أن : $\overline{ص} = \frac{\sum ن_هـ ص_هـ}{\sum ن_هـ} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$\overline{ص} \simeq 0,44$

وبما أن : $\overline{ص} = \frac{\overline{س} - 165}{10}$

فإن : $\overline{س} = 10 \overline{ص} + 165$.

أي : $\overline{س} \simeq 10 (0,44) + 165$.

$\overline{س} \simeq 169,4$

2-1 الوسط الهندسي.

$أ_1$ ، $أ_2$ ، ...، $أ_ن$ أعداد موجبة.

الوسط الهندسي لهذه الأعداد هو العدد هـ حيث :

$$هـ = \sqrt[ن]{أ_1 \times أ_2 \times ... \times أ_ن}$$

$س_1$ ، $س_2$ ،...، $س_ك$ أعداد موجبة. نفرض أن $س_1$ مكرّر $ن_1$ مرة، $س_2$ مكرّر $ن_2$ مرّة ، ....، $س_ك$ مكرّر $ن_ك$ مرة.

نضع $ن_1 + ن_2 + ... + ن_ك = ن$

في هذه الحالة، الوسط الهندسي للأعداد $س_1$ ، $س_2$ ،...، $س_ك$ هو العدد هـ حيث : هـ =

$$\sqrt[ن]{س_1^{ن_1} \times س_2^{ن_2} \times ... \times س_ك^{ن_ك}}$$

3-1 - الوسط التوافقي :

$أ_1$ ، $أ_2$ ، ...، $أ_ن$ أعداد غير معدومة.

الوسط التوافقي لهذه الأعداد هو العدد ت حيث :

$$\frac{ن}{ت} = \frac{1}{أ_1} + \frac{1}{أ_2} + ... + \frac{1}{أ_ن}$$

* $س_1$ ، $س_2$ ،...، $س_ك$ أعداد غير معدومة. نفرض أن $س_1$ مكرّر $ن_1$ مرة، $س_2$ مكرر $ن_2$ مرّة ، ....، $س_ك$ مكرر $ن_ك$ مرة.

نضع : $ن_1 + ن_2 + ... + ن_ك = ن$.

في هذه الحالة، الوسط التوافقي للأعداد $س_1$ ، $س_2$ ،...، $س_ك$ هو العدد ت حيث :

$$\frac{ن}{ت} = \frac{ن_1}{س_1} + \frac{ن_2}{س_2} + ... + \frac{ن_ك}{س_ن}$$

1 - 4 - المنوال.

تعريف :

المنوال هو أكبر قيمة للطبع المقابلة للتكرار الأكبر.

*** أمثلة :**

- في حالة طبع متقطع :

لنعتبر المثال 1 (أنظر إلى الفقرة 1-1)

في هذا المثال، المنوال هو 17 لأن 21 هو التكرار الأكبر.

- في حالة طبع مستمر :

نسمي فئة منوالية الفئة المقابلة للتكرار الأكبر. ونصطلح أن نقول أن المنوال هو مركز الفئة المنوالية.

لنعتبر المثال 2 (أنظر إلى الفقرة 1-1)

في هذا المثال، الفئة المنوالية هي [170، 180 [والمنوال هو 175.

1 - 5 - الوسيط.

نرتّب قيم الطبع ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

تعريف :

الوسيط هو قيمة الطبع التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعتين لهما نفس عدد المفردات.

*** كيفية حساب الوسيط.**

- في حالة طبع متقطع.

أ) إذا كان عدد مفردات المجتمع الإحصائي عدداً فردياً، أي 2 ن + 1، فإن الوسيط هو قيمة طبع المفردة التي مرتبتها ن + 1.

ب) إذا كان عدد مفردات المجتمع الإحصائي عددا زوجيا، أي 2 ن، فإن الوسيط هو الوسط الحسابي لقيمتي المفردتين اللتين مرتبتاهما ن وَ ن + 1.

لنعتبر المثال 1 السابق.

في هذا المثال، 2 ن = 36. أي : ن = 18

قيمة طبع المفردة التي مرتبتها 18 هي 17 سنة.

وقيمة طبع المفردة التي مرتبتها 19 هي 17 سنة.

إذن الوسيط هو العدد وحيث : و = $\frac{17+17}{2}$ أي : و = 17 سنة.

- في حالة طبع مستمر :

لنعتبر المثال 2 السابق.

العدد الكلي للمفردات هو : ن = 36

$$\frac{ن}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

حسب الجدول، المفردة التي مرتبتها 18 تقابلها الفئة [170، 180 [. إذا كان و الوسيط فإننا نستنتج أن : 180 > و > 170.

لتعتين الوسيط و، نفرض أن في الفئة [170، 180 [قيم الطبع تتناسب مع التكرارات المقابلة لها.

هذا يعني أن النقط :

أ (170، 14)، ب (180، 31)، جـ (و، 18) على إستقامة واحدة.

نستنتج أن : $\frac{31 - 14}{180 - 170} = \frac{18 - 14}{\text{و} - 170}$

أي : $\frac{17}{10} = \frac{4}{\text{و} - 170}$

$\text{و} = 170 + \frac{10 \times 4}{17}$. و = 172,35 سم.

ملاحظات :

يمكن تعيين الوسيط و بيانيا كما يلي :

أ) باستعمال المضلّع التكراري المتجمّع الصاعد (أو النازل).

قيمة الوسيط هي فاصلة نقطة المضلّع التي ترتيبها 18.

ب) باستعمال المضلّعين السابقين المرسومين في نفس المعلم قيمة الوسيط هي فاصلة نقطة تقاطع المضلّعين.

2- مقاييس التشتت.

لنعتبر السلسلة الإحصائية :

قيّم الطبع : س_1 ، س_2 ،...، $\text{س}_\text{ك}$.

التكرارات : ن_1 ، ن_2 ،...، $\text{ن}_\text{ك}$

(في حالة طبع مستمر، س_1 ، س_2 ،...، $\text{س}_\text{ك}$ تمثّل مراكز الفئات).

نضع : $\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{هـ}=\text{ك}} \text{ن}_\text{هـ} = \text{ن}$.

ليكن $\overline{\text{س}}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة

$$\overline{\text{س}} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{هـ}=\text{ك}} \text{ن}_\text{هـ} \, \text{س}_\text{هـ}$$

2 – 1 – مدى سلسلة إحصائية :

تعريف :

مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للطبع.

أمثلة :

أ) مدى السلسلة الإحصائية الواردة في المثال 1 هو :

18 – 15. أي : 3 سنوات.

ب) مدى السلسلة الإحصائية الواردة في المثال 2 هو : 190 – 140. أي : 50 سم.

2 – 2 – الإنحراف

تعريف :

$س_هـ$ قيمة للطبع.

نسمي إنحراف $س_هـ$ بالنّسبة إلى الوسط الحسابي $\overline{س}$ العدد : $|س_هـ - \overline{س}|$.

2 – 3 – الإنحراف المتوسط :

تعريف :

الإنحراف المتوسط لسلسلة إحصائية بالنّسبة إلى وسطها الحسابي س هو العدد $أ_م$

حيث :

$$أ_م = \frac{1}{ن} \sum_{هـ=1}^{هـ=ك} ن_هـ |س_هـ - \overline{س}|$$

2 – 4 – التباين – الإنحراف المعياري

تعريف :

تباين سلسلة إحصائية هو العدد ت (س) حيث :

$$ت(س) = \frac{1}{ن} \sum_{هـ=1}^{هـ=ك} ن_هـ (س_هـ - \overline{س})^2$$

تعريف

الإنحراف المعياري لسلسلة إحصائية هو الجذر التربيعي لتباينها.

نرمز إلى الإنحراف المعياري بالرمز $\sigma_س$.

إذن، حسب التعريف، لدينا : $\sigma_س = \sqrt{ت(س)}$

أي : $\sigma^2_{س} =$ ت(س)

***خواص :**

1 – نبرهن أن : $ت(س) = \frac{1}{ن}\left(\sum_{هـ=1}^{هـ=ك} ن_{هـ} س^2_{هـ}\right) - (\overline{س})^2$

لحساب التباين (أو الإنحراف المعياري)، من الأفضل إستعمال هذه الصيغة.

2 – إذا إخترنا متغيّرا آخر ص $_{هـ}$ بحيث :

$ص_{هـ} = أ\, س_{هـ} + ب \quad (أ \neq 0)$

فإننا نعلم أن : $\overline{ص} = أ\, \overline{س} + ب$

نبرهن في هذه الحالة أن : $\sigma_{ص} = |أ| . \sigma_{س}$

حيث $\sigma_{ص} = \frac{1}{ن}\left(\sum_{هـ=1}^{هـ=ك} ن_{هـ} ص^2_{هـ}\right) - (\overline{ص})^2$

مثال :

لنحسب الإنحراف المعياري $\sigma_{س}$ للسلسلة الإحصائية الواردة في المثال 2 السابق.

مراكز الفئات: س $_{هـ}$	التكرارات ن $_{هـ}$	ص $_{هـ}$ = س $_{هـ}$ – 165	ص$^2_{هـ}$	ص $_{هـ}$ ن $_{هـ}$	ص$^2_{هـ}$ ن $_{هـ}$
145	2	2–	4	4–	8
155	7	1–	1	7–	7
165	5	0	0	0	0
175	17	1	1	17	17
185	5	2	4	10	20
	$\sum$ ن $_{هـ}$ = 36			$\sum$ ص $_{هـ}$ ن $_{هـ}$ = 16	$\sum$ ص$^2_{هـ}$ ن $_{هـ}$ =52

لدينا :

$$\overline{ص} = \frac{\sum ن_{هـ} ص_{هـ}}{\sum ن_{هـ}} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$\sigma^2_{ص} = \frac{1}{\sum ن_{هـ}}\left(\sum ن_{هـ} ص^2_{هـ}\right) - \overline{ص}^2$$

$$\sigma^2_{ص} = \frac{52}{36} - \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$= \frac{13}{9} - \frac{16}{81}$$

$$= \frac{9 \times 13 - 16}{81}$$

$$\sigma^2_{\text{ص}} = \frac{101}{81}$$

$$\sigma^2_{\text{ص}} \simeq 1.246$$

إذن :

$\sigma_{\text{ص}} = \sqrt{1.246}$ أي : $\sigma_{\text{ص}} \simeq 1.11$

لـديـنـا :

$$\text{ص}_{\text{هـ}} = \frac{1}{10}\,\text{س}_{\text{هـ}} - \frac{165}{10}.$$

إذن :

$$\sigma_{\text{ص}} = \frac{1}{10}\,\sigma_{\text{س}}$$

أي :

$$\sigma_{\text{س}} = 10\,\sigma_{\text{ص}}$$

$$\sigma_{\text{س}} \simeq 10 \times 1.116$$

$\sigma_{\text{س}} \simeq 11.16$ سم

3 – تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتــي.

3 – 1 الـعـلامـات (أو الـنـقـط) الـمـحـصـل عـلـيـهـا مـن طـرف 20 تـلـمـيـذا فـي نـفـس الإمـتـحـان مـوزّعـة كـمـا يلـي :

الـعـلامـات : $\text{س}_{\text{هـ}}$	7	8	9	10	12	14	16
عدد الـتـلامـيـذ: $\text{ن}_{\text{هـ}}$	2	4	4	5	3	1	1

أحـسـب الـوسـط الـحـسـابـي $\overline{\text{س}}$ والـوسـيـط و .

3 – 2 الـسـلـسـلـة الـتـالـيـة تـخـص تـوزيـع الأجـور (بـالـدنـانـيـر) فـي يـوم واحـد مـن الـعـمـل فـي مـؤسـسـة :

الأجـرة : $\text{س}_{\text{هـ}}$	[80، 90[	[90، 100[	[100، 110[	[110، 120[
عدد العمال : $\text{ن}_{\text{هـ}}$	2	15	124	136

الأجرة : $س_{هـ}$	[120، 180[	[130، 140[	[140، 150[
عدد العمال : $ن_{هـ}$	98	53	27

1 – أحسب الوسيط و.

2 – أحسب الوسط الحسابي $\overline{س}$ والإنحراف المعياري $\sigma_{س}$.

3 – أنشئ المضلّع التكراري المتجمع الصّاعد. عيّن بيانيا الوسيط.

4 – الأجوبـة.

4 – 1 – حل الـتمـريـن 3 – 1 :

ن $_{هـ}$ س $_{هـ}$	الـتكرارات ن $_{هـ}$	الـعـلامـات س $_{هـ}$
14	2	7
32	4	8
36	4	9
50	5	10
36	3	12
14	1	14
16	1	16
$\sum$ ن $_{هـ}$ س $_{هـ}$ = 198	$\sum$ ن $_{هـ}$ = 20	

حساب الـوسط الـحسابـي $\overline{س}$.

لدينـا : $\overline{س} = \frac{\sum ن_{هـ} س_{هـ}}{\sum ن_{هـ}}$

$\overline{س} = \frac{198}{20}$

$\overline{س} = \frac{99}{10}$

$\overline{س} = 9,9$

* حسـاب الـوسـيـط و.

لدينـا عدد زوجي من تـلاميـذ وهـو 20. إذن الـوسيط و هـو الـوسط الـحسـابي لـعـلامـتـي الـتـلـميذين الـلـذيـن مرتـبـتـاهـمـا 10 وَ 11.

أي : $و = \frac{9 + 10}{2}$

$و = 9,5$

4 – 2 – حل الـتمـريـن 3 – 2.

1 – حسـاب الـوسـيـط و.

عدد عـمـال الـمؤسـسـة هـو : ن = 455.

$\frac{ن}{2} = \frac{455}{2} = 227,5$.

حسـب الـجدول، 227.5 تـقـابـلـه الـفـئـة [110، 120[. إذن : 120 > و > 110.

نـفـرض أن فـي الـفـئـة [110، 120[قـيـم الـطـبـع تـتـنـاسـب مـع الـتـكـرارات الـمـقـابـلـة لـهـا.

هـذا يـعـنـي أن الـنـقـطـ :

أ (110، 141)، ب (120، 277)، جـ (و،227,5) على إستقامة واحدة.

نستنتج أن :

$$\frac{141-277}{120-110}=\frac{141-227.5}{و-110}$$

أي : $\frac{136}{10}=\frac{86.5}{و-110}$

$$و=110+\frac{86.5\times 10}{136}$$

$و \simeq 110+6.36$

$و \simeq 116.36$ دج.

2 – حساب الوسط الحسابي $\overline{س}$ والإنحراف المعياري $\sigma_{س}$

لنضع : $ص_{هـ}=\frac{س_{هـ}-115}{10}$

نحسب $\overline{ص}$ ، ثم $\sigma_{ص}$ فنستنتج $\overline{س}$ ، $\sigma_{س}$ لأن : $\overline{ص}=\frac{\overline{س}-115}{10}$

و $\sigma_{ص}=\frac{1}{10}\sigma_{س}$

مراكز الفئات: $س_{هـ}$	التكرارات $ن_{هـ}$	$ص_{هـ}=\frac{س_{هـ}-115}{10}$	$ص^2_{هـ}$	$ن_{هـ}\ ص_{هـ}$	$ن_{هـ}\ ص^2_{هـ}$
85	2	3–	9	6–	18
95	15	2–	4	30–	60
105	124	1–	1	124–	124
115	136	0	0	0	0
125	98	1	1	98	98
135	53	2	4	106	212
145	27	3	9	81	243
	$\sum ن_{هـ}=455$			$\sum ن_{هـ}ص_{هـ}=125$	$\sum ن_{هـ}ص^2_{هـ}=55$

لدينا : $\overline{ص}=\frac{\sum ن_{هـ}\ ص_{هـ}}{\sum ن_{هـ}}$

$$\overline{ص}=\frac{125}{455}$$

$\overline{ص}=\frac{25}{91}$ أي $\overline{ص}\simeq 0.275$

لدينا :

$$\sigma^2_{ص} = \frac{1}{\sum ن_{هـ}} \left(\sum ن_{هـ} ص^2_{هـ}\right) - (\overline{ص})^2$$

$$= \frac{1}{455}(755) - \left(\frac{25}{91}\right)^2$$

$$= \frac{755}{455} - \left(\frac{25}{91}\right)^2$$

$$\sigma^2_{ص} = \frac{151}{91} - \left(\frac{25}{91}\right)^2$$

$$\sigma^2_{ص} = \frac{13116}{8281}$$

$$\sigma^2_{ص} = 1.582$$

$$\sigma_{ص} = \sqrt{1.582}$$

$$\sigma_{ص} \simeq 1.26$$

* حساب الوسط الحسابي $\overline{س}$.

لدينا : $\overline{ص} = \frac{\overline{س} - 115}{10}$

$$\overline{س} = 10\,\overline{ص} + 115$$

$$\overline{س} \simeq 10 \times 0.275 + 115$$

$\overline{س} \simeq 117.75$ دج

* حساب الإنحراف المعياري $\sigma_{س}$.

لدينا : $\sigma_{ص} = \frac{1}{10}\sigma_{س}$

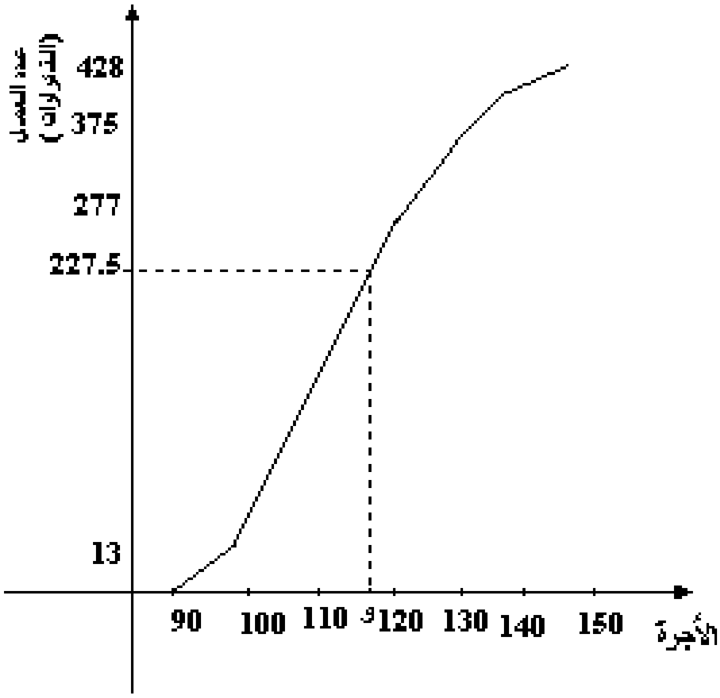
إذن $\sigma_{س} = 10\,\sigma_{ص}$

$$\sigma_{س} \simeq 10 \times 1.26$$

$$\sigma_{س} \simeq 12.6$$

3 – لننشىء الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

الأجرة	90 >	100 >	110 >	120 >
التكرارات	2	17	141	277
الأجرة	130 >	140 >	150 >	
التكرارات	375	428	455	



الوسيط وهو فاصلة نقطة المضلّع التكراري المتجمّع الصاعد التي ترتيبها 227.5
تقرأ : و ≃ 116.

تمارين لمراجعة دروس الإرسال الثالث

1) * حل في $ط^2$ المعادلة : 7 س − 4 ع = 4

* عدد طبيعي ن يكتب $\overline{75}$ في النظام ذي الأساس س ويكتب $\overline{49}$ في النظام ذي الأساس ع. عدد طبيعي آخر هـ يكتب $\overline{310}$ في النظام ذي الأساس س ويكتب $\overline{125}$ في النظام ذي الأساس ع. عين س ، ع ثم ن ، هـ.

2) عين الأعداد الحقيقية أ ، ب ، جـ بحيث :

$\forall$ س $\in$ ح : 8 $س^4$ + 6 $س^2$ + 2 = (2 $س^2$ + س + 1) (أ $س^2$ + ب س + جـ)

استنتج أنه في نظام التعداد ذي الأساس 9 العدد ن = $\overline{80602}$ يقبل القسمة على العدد هـ = $\overline{211}$. أكتب في هذا النظام ناتج القسمة الإقليدية للعدد ن على العدد هـ.

3) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) نعتبر المنحني Γ الذي معادلته : 9$س^2$ +4$ع^2$ − 18س + 16ع − 11 = 0

حدد طبيعة المنحنىΓ.

4) (م ،$\vec{و}$ ،$\vec{ي}$) معلم متعامد ومتجانس في المستو، $\Gamma_ط$ مجموعة النقط التي تحقق احداثياتها المعادلة : ط $س^2$ +$ع^2$ −2س = 0

حيث ط وسيط حقيقي.

* انشيء المنحنيات : Γ_2 ، Γ_0 ، $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ ، Γ_1 ، Γ_4

حدد طبيعة $\Gamma_ط$ حسب قيم الوسيط ط.

5) يضم قسم دراسي 6 بنات و10 أولاد، يراد إختيار مجلساً إدارياً لهذا القسم يضم 3 تلاميذ، وذلك بطريقة عشوائية.

أحسب الإحتمال حتى يكون :

*المجلس المختار يتكون من 3 أولاد

*المجلس المختار يضم ولدين فقط

*أحد تلاميذ المجلس المختار على الأقل يكون ولداً.

*المجلس المختار يشمل بنتين.

6) $ك_1$ كيس يضم 5 كرات حمراء، 3 كرات بيضاء.

$ك_2$ كيس آخر يضم كرتين حمراوين، 6 كرات بيضاء

*إذا سحبنا كرة واحدة من كل كيس ما هو إحتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد.

* إذا سحبنا كرتين من كل كيس ما هو إحتمال أن تكون الكرات الأربع المسحوبة من لون واحد.